Cumhuriyet International Journal of Education – Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi
e-ISSN: 2147-1606
Volume / Cilt 8 | Issue / Sayı 2 June / Haziran 2019

Sınıf Öğretmenliği Öğrencilerinin Temel Matematik İspatlarını Yapma Sürecindeki Bilişsel Yapılar ve Argümanları

Mesut Öztürk[1] Yaşar Akkan[2] Abdullah Kaplan[3]

Type/Tür:
Research/Araştırma
Received/Geliş Tarihi:
November 30/ 30 Kasım 2018
Accepted/Kabul Tarihi: April 22/ 22 Nisan 2019
Page numbers/Sayfa No: 429-452
Corresponding Author/İletişimden Sorumlu Yazar: mesutozturk@live.com

Öz

Bu çalışma sınıf öğretmenliği öğrencilerinin temel matematik ispatlarını yapma süreçlerini bilişsel açıdan ve kullandıkları argümanlar cinsinden incelemek amacıyla yapılmıştır. Çalışmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması modeli kullanılmıştır. Bu çalışmada sınıf öğretmenliği 1. sınıfında öğrenim gören 89 öğrenci temel matematik dersi ara sınav notlarına göre yüksek, orta ve düşük başarılı olarak üç gruba ayrılmıştır. Ardından her gruptan rastgele yolla biri kız biri erkek olmak üzere iki öğrenci (toplamda 6 öğrenci) seçilmiştir. Çalışmada veriler etkinlik kartı ve sesli düşünme protokolü yoluyla toplanmıştır. Etkinlik kartında öğrencilere kümeler konusu ile ilgili iki önerme verilmiş ve bu önermeleri sesli düşünerek ispatlamaları istenmiştir. Çalışmada nitel veri analizi yöntemlerinden betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Betimsel analiz toplanan nitel verilerin daha önceden oluşturulmuş belli kategoriler doğrultusunda analize katılmasına dayanmaktadır. Bu çalışmada sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapma sürecindeki bilişsel süreçlerini incelemek için Tall'un (2004) geliştirip Tall ve Mejia-Ramos'un (2010) daha detaylı açıkladığı matematiğin zihinsel dünyasının gelişiminde olan somutlaştırma, sembolleştirme ve aksiyomlarla formel ifade etme bilişsel aşamaları kullanılmıştır. Öğrencilerin ispatlarını gerekçelendirdikleri argümanlarını incelemek için Toulmin'in (1958) ispat yapma sürecindeki argüman üretme aşamaları kullanılmıştır. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin ispat yapma sürecinde somutlaştırma, sembolleştirme ve formel ifade etme bilişsel yapılarını; iddianın ortaya atılması, verinin sunumu, doğrulayıcı ifadeler ve sınırlılıkları çürütme argümanlarını kullandıkları tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sınıf öğretmenliği, ispat yapma, bilişsel yapılar, argümanlar

Suggested APA Citation /Önerilen APA Atıf Biçimi:
Öztürk, M., Akkan, Y. & Kaplan, A. (2019). Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin temel matematik ispatlarını yapma sürecindeki bilişsel yapılar ve argümanları. *Cumhuriyet International Journal of Education*, *8*(2), 429-452. http://dx.doi.org/10.30703/cije.490887

[1] Dr. Öğr. Üyesi, Bayburt Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Bayburt/Türkiye
Asst. Prof., Bayburt University, Department of Mathematics and Science Teaching, Bayburt/Turkey
e-mail: mesutozturk@live.com **ORCID ID:** https://orcid.org/0000-0002-2163-3769

[2] Doç. Dr., Gümüşhane Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Gümüşhane/Türkiye
Assoc. Prof., Gümüşhane University, Department of Mathematics Engineering, Gümüşhane/Turkey
e-mail: akkanyasar61@hotmail.com **ORCID ID:** https://orcid.org/0000-0001-5323-7106

[3] Prof. Dr., Atatürk Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Erzurum/Türkiye
Prof., Atatürk University, Department of Mathematics and Science Teaching, Erzurum/Turkey
e-mail: ornek@gmail.com **ORCID ID:** https://orcid.org/0000-0001-6743-6368

Cognitive Structures and Arguments of Elementary School Student Teachers' during Process of Basic Mathematics Proofs

Abstract

This case study aims to examine the elementary school student teachers' process of making basic mathematical proofs in terms of their cognition and arguments which they use. In this study, 89 voluntary first graders in an elementary teacher department are divided into three groups according to their basic mathematics midterm scores: (1) high, (2) medium and (3) low achievement. Two students one of which male and the other one is female are randomly selected from each group (6 in total). Data is collected through activity card and thinking aloud protocol. On the activity card, two propositions are given to the students about the topic of sets and they are asked to prove these propositions by thinking aloud. For the analysis of the data, descriptive analysis method, which is based on the analysis of the collected qualitative data in accordance with certain previously formed categories, is used. In order to examine the cognitive processes of the primary school teaching students in the process of making proof, this study uses the cognitive stages of formal expression with the concrete development, symbolization and actions in the development of the mental world of mathematics, developed by Tall (2004) and explained in detail by Tall and Mejia-Ramos (2010). In order to examine the arguments with which students justify their evidences, Toulmin's (1958) stages of argument production in evidence making are applied. The results of this study indicate that the students use the cognitive structures of embodiment, symbolization and formal expression together with assertion, presentation, verification, and refutation of limitations.

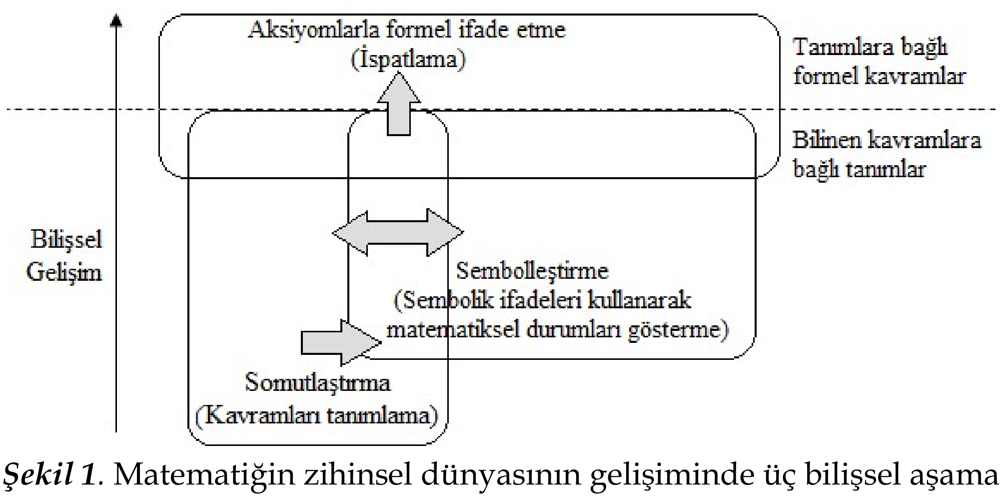
Keywords: Elementary school student teacher, proving, cognitive structures, argumentation

Giriş

Okulöncesi ve ilkokul öğrencilerin matematikle tanışmaya başladıkları dönemdir. Okulöncesi dönemde matematikte öğrenciler genellikle geometrik şekillerde çalışmakta, nesneleri karşılaştırmakta ve 1'den 10'a kadar olan sayılarla işlem yapmayı öğrenmektedir. İlkokulda ise ortaokul matematiği için gerekli olan temel matematiksel bilgileri öğrenmektedir. Her iki dönemde matematik öğretimi için önemli olmasına karşın ilkokul yıllarında daha fazla formel bilginin öğrenilmesi gerektiği için ilkokul dönemi daha önemlidir. Bu dönemde öğrencinin matematik bilgisi ve tutumunun gelişiminde öğretmenlerin önemli etkisi olduğu bilinmektedir. Yapılan araştırmalar öğretmenlerin matematik bilgilerinin öğrencilerinin matematiğe yönelik bakış açılarını etkilediğini ortaya koymuştur. Bu nedenle öğretmenlerin matematik bilgilerinin iyi olması önemlidir. Sınıf öğretmenlerinin matematik bilgilerinin oluşmasında yükseköğrenim dönemlerinde aldıkları Temel Matematik Dersleri önemli yere sahiptir. Çünkü sınıf öğretmenliği öğretim programında öğrencilerin matematiğe yönelik iki alan dersi bulunmaktadır: Temel Matematik I ve Temel Matematik II. Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin aldıkları bu derslerde matematik öğrenmede boşluklar oluşursa öğretmenlik yaşamlarında matematik bilgileri eksik kalabilir. Bu durum onların öğrencilerine olumsuz anlamda yansıyabilir. Öğrenmede eksiklikler olmaması için bu derslerde öğrenciler sonuç odaklı değil süreç odaklı yetiştirilmelidir. Bunun için öğrenciler iyi düzeyde problem çözme becerisine sahip olmakla birlikte temel düzeyde ispat yapma becerisine de sahip olmalıdır. Yukarıda açıklanan gerekçeler sınıf öğretmenlerinin yetiştirilme sürecinde aldıkları bu derslerde ispatı nasıl yaptıklarının incelenmesini gerekli kılmaktadır. Buna karşın alan yazın incelendiğinde sınıf öğretmenlerinin ispat yapma sürecini inceleyen yeterli sayıda çalışma olmadığı görülmektedir. Bu çalışma sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapma sürecini ortaya koymayı amaçlamıştır. Çalışmada elde edilen sonuçların öğretmen yetiştirme sürecinde öğrenme ortamının tasarlanmasına rehberlik etmesi beklenmektedir. Ayrıca çalışma sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapma sürecini ortaya çıkarması bakımından da önemlidir.

Matematiksel İspat Yapma ve Bilişsel Süreci

Matematiksel ispat, bir yargının veya savın doğru olup olmadığını matematiksel yolları kullanarak ortaya çıkarmadır (Öztürk, 2017). Matematik eğitiminde ispat ise bu kavramdan biraz daha farklı ve derin anlamlara sahiptir. Matematik eğitiminde ispat, doğruluğu daha önceden gösterilmiş olan matematiksel önermelerin doğruluğuna veya yanlışlığına öğrencileri ikna etmedir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016, s. 66). Matematiksel ispat yapma sadece matematikte teoremlerin anlaşılması için değil, aynı zamanda matematiksel düşünmenin geliştirilmesi ve matematiksel kavramların anlaşılması için de önemlidir (Dawkins ve Weber, 2016). Çünkü ispat yapma matematiksel akıl yürütme becerisini gerekli kılmaktadır (Demir, Öztürk ve Güven, 2018). Birçok matematik eğitimcisi ispatı matematik derslerinin önemli bir parçası olarak görmekte ve matematiksel uygulamaların yapılması için ispat yapmayı bilmenin gerekli olduğuna işaret etmektedir (Dawkins ve Weber, 2016; Dede ve Karakuş, 2014). Hanna ve Villiers (2008) ispat yapma becerisinin kazanılabilmesi için bireylerin erken yaşlardan itibaren ispat ile tanışması gerektiğini ifade etmiştir. Araştırmacılar bununla birlikte ispat yapmada öğretmenlerin tutumları ve bilgileri ile öğretim programının önemli olduğunu ifade etmiştir. Tall (2004) matematiğin zihinsel dünyasının gelişiminde üç bilişsel aşama olduğuna işaret etmiştir: somutlaştırma (kavramları tanımlama), sembolleştirme (sembolik ifadeler kullanarak matematiksel durumları ifade etme) ve aksiyomlarla formel ifade etme (ispatlama). Bu zihinsel dünyalar hiyerarşik bir şekilde ilerleyip birbiri içerisine geçmektedir. İlk iki zihinsel dünya kavramların tanımlarını içerirken, üçüncü zihinsel dünya formel kavramların kullanımını gerektirmektedir. Tüm bu süreç matematik için bilişsel gelişim sürecini içermektedir. Tall ve Mejia-Ramos (2010) bu durumu Şekil 1'deki gibi görselleştirmiştir.



Şekil 1. Matematiğin zihinsel dünyasının gelişiminde üç bilişsel aşama

Şekil 1 incelendiğinde bilişsel gelişim sürecinin en üst düzeyinde aksiyomlarla formel ifade etme olduğu görülmektedir. Birinci düzey olan somutlaştırma aşaması bireylerin fiziksel dünyadaki deneyimlerini içermektedir. Örneğin "bir kümenin elemanları" ifadesini ele alalım. Bu ifade pek çok bireyin zihninde somutlaştırabileceği sınırlarını çizebileceği veya çevresindeki bir durumla örneklendirebileceği bir durumdur. Bir kümenin elemanlarının fiziksel dünyada canlandırılabilmesi durumu ilk aşama olan somutlaştırma aşamasıdır. İkinci düzey ise bireylerin bir ispata başlayabilecekleri ifadeleri yazabildikleri durumdur. Örneğin bir kümenin elemanları ifadesini "$x \epsilon A$ olsun" biçiminde ifade edebilmesi, somutlaştırılabilen bir durumun sembolik ifadesini gerektirmektedir. Bu sembolik ifade durumu sembolleştirme aşamasıdır. Formel ifade etme ise ispatın gerçek durumudur. Bu aşamada sembolik ifadeler kullanılarak ispatlar yapılabilir. Tüm bu aşamalar ispatın bilişsel yapısını ortaya koymaktadır. İspat yapmanın bilişsel yönü bir buzdağının görünen yüzü iken buzdağının görünmeyen yüzünde ispatın geçerliğini veya doğruluğu etkileyen gerekçelendirmeler ve argümantasyonlar yer almaktadır (Tall ve Mejia-Ramos, 2010).

İspatın Geçerliği ve Argümantasyon

Bir ispatın kabul görmesi onun geçerliği ile ilgilidir. Bir ispatın geçerli olabilmesi için hem güvenilir olması hem de her bir iddianın veya öncülün doğru olması gerekmektedir (Tall ve Mejia-Ramos, 2010). Bununla birlikte geçerli argümanlarla desteklenmiş olması gerekir. Bir veya daha fazla iddianın (önermenin) doğruluğunu ortaya koymak için öne sürülen sözel, sosyal ve mantıksal argümanlar argümantasyon olarak tanımlanmaktadır (van Eemeren, Grootendorst ve Snoeck-Henkemans, 2002). Kane (2013) iki tür argüman olduğunu iddia etmiş, bu argümanları geçerli argüman ve yorumlanan argüman olarak açıklamıştır. Yorumlanan argüman bazı tam varsayımlar içerebileceği gibi gereksiz varsayımlar veya hatalı varsayımlar içerebilir. Geçerli argüman ise tam doğru varsayımlar içeren argümanlardır. Newton (2013) ise tek tür argümanın var olduğunu bu argümanında geçerli argüman olduğunu savunmuştur. Toulmin (1958) ispat yapma sürecinde argüman üretmenin altı aşamalı bir süreç olduğunu ifade etmiştir. Bu sürecin ilk aşaması bir *iddia* ile başlar ve bu iddia ile ilgili *verinin sunumu*yla devam eder. İddia ile veri arasındaki bağ *haklı neden* olarak ifade edilmektedir. Ardından haklı gerekçeyi *destek*leyen ifadelere yer verilir. En önemlisi iddiayı güçlendirecek *niteleyici*ler verilir. Son olarak argümanla ilgili sınırlılıklar *çürütülür*.

Matematiksel argümanlar ve ispat arasındaki ilişkide diyagramatik akıl yürütme (sadece mantıkla açıklanamayan aynı zamanda sembol ve temsil sistemlerinin de kullanılmasını gerektiren bir akıl yürütme türü) büyük öneme sahiptir (Hanna, Jahnke ve Pulte, 2010). Titiz argümanlar kullanılması bir ispatı geçerli kılabilir ancak ispatın güzelliği sembol ve formüllerin kullanımı ile ilgili olan bir durumdur (Hanna ve Barbeau, 2010).

Alan Yazın Derleme

Alan yazın incelendiğinde son yıllarda matematik eğitiminde ispata yönelik çalışmalarda artış olduğu ve çalışma alanlarının genişlediği görülmektedir. Yapılan çalışmalar ispata yönelik görüşleri (Kaplan, Doruk, Öztürk ve Duran, 2016), ispat şemalarını (Fischbein, 1999), ispat yapma sürecini (Doruk ve Kaplan, 2013), ispat öğretimini (Reiss ve Renkl, 2002), ispat ve argümantasyon arasındaki ilişkiyi

(Pedemonte, 2007) ve ispatın bilişsel yönünü (Öztürk ve Kaplan, 2019) incelemiştir. Öztürk ve Kaplan (2019) ispatın bilişsel yönünü incelemeye yönelik yaptıkları çalışmada matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ispatlama süreçlerini bilişsel ve üst bilişsel olarak iki temada toplamışlardır. Bu sınıflama önemli olmasına karşın tek başına yeterli değildir. Örneğin öğretmenlerin ispat yapmada ne gibi argümanları kullandıkları çalışmada ele alınmamıştır. Ayrıca çalışmalar genellikle matematik öğretmenleri, matematik öğretmeni adayları ve lise öğrencileri ile yürütülmüş olup sınıf öğretmenliği öğrencileri ile yapılan çalışmalar oldukça sınırlı sayıdadır (Öztürk, Akkan ve Kaplan, 2018). Hal böyle iken sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispatlama süreçlerinin bilişsel gelişim açısından incelenmesi ve ispat yaparken kullandıkları argümanların belirlenmesi öğretmen adaylarına verilecek alan bilgisi derslerinin düzenlenmesi için önemlidir. Ayrıca yapılan araştırmalarda öğretmenlerin matematik bilgisinin öğrencilerin matematik bilgisini etkilediği ortaya konulduğundan bu çalışma öğretmenlerin matematik bilgisi ve kullandıkları matematiksel argümanları da ortaya koyacaktır. Bu bağlamda çalışmada elde edilen sonuçların sınıf öğretmeni eğitiminde mevcut durumu göstererek öğretim ortamının gözden geçirilmesinin gerekliğini ortaya koyması beklenmektedir. Çalışma sınıf öğretmenliği öğrencilerinin temel matematik ispatlarını yapma süreçlerini bilişsel açıdan ve kullandıkları argümanlar cinsinden incelemek amacıyla yapılmıştır. Çalışmada aşağıdaki alt problemlere yanıt aranmıştır:

1. Sınıf öğretmenliği öğrencileri temel matematik ispatlarını yapma sürecinde ne tür bilişsel yapılar kullanmaktadır?
2. Sınıf öğretmenliği öğrencileri temel matematikte kendi ispatlarını doğrulamada ne tür argümanlar kullanmaktadır?

Yöntem

Araştırma Modeli

Çalışmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması modeli kullanılmıştır. Durum çalışması, sınırları kesin olarak belli olan bir durumu ele alarak derinlemesine inceleme amacıyla kullanılır (Stake, 2010). Bu çalışmada sınıf öğretmenlerinin ispat yapma süreci, bilişsel yapı ve argümanlar açısından inceleneceğinden bu model seçilmiştir. Çünkü ispat yapma sadece sonuç isteyen bir eylem değil süreci de ön plana alan bir aktivitedir. Durum çalışması da sürecin detaylı incelenmesine olanak sağladığından bu modelin kullanılması tercih edilmiştir.

Katılımcılar

Çalışmanın katılımcıları maksimum çeşitlilik örnekleme yöntemiyle seçilmiştir. Maksimum çeşitlilik örnekleme yöntemi seçkisiz örnekleme yöntemlerinden birisi olmasına rağmen bir grubu temsil eden farklı düzeylerden bireylerin seçimine dayandığı için nitel araştırmalarda örneklem seçiminde ilk tercihlerden birisidir (Maykut ve Morehouse, 2005). Bu çalışmada sınıf öğretmenliği 1. sınıfında öğrenim gören 89 öğrenci temel matematik dersi ara sınav notlarına göre yüksek düzey, orta düzey ve düşük düzey başarılı olarak üç gruba ayrılmıştır. Öğrencilerin başarı düzeylerine göre gruplanma sürecinde öğrenciler en başarılıdan en başarısıza doğru sıralanmıştır. Yapılan sıralamanın ardından ilk 30 öğrenci yüksek başarılı, sonraki 30 öğrenci orta düzey başarılı ve son 29 öğrenci düşük başarılı olarak belirlenmiştir. Ardından her gruptan rastgele yolla biri kız biri erkek olmak üzere iki öğrenci (toplamda 6 öğrenci) seçilmiştir. Öğrencilere çalışmanın amacı hakkında bilgi verilmiş ve çalışmaya katılımlarının ders notlarında olumlu veya olumsuz herhangi bir şekilde değerlendirilmeyeceği toplanan verilerin sadece bilimsel amaçlı kullanılacağı belirtilmiştir. Çalışmaya katılan öğrencilerin yaş ortalaması (17,2) olarak hesaplanmıştır. Seçilen öğrencilerin beşi ortaöğretimde eşit ağırlık, biri (düşük başarı düzeyindeki kız öğrenci) sözel bölüm mezunudur. Çalışmada öğrencilerin ifadelerini belirtirken takma adlar kullanılmıştır. Bu adlar yüksek başarı düzeyindeki öğrenciler için Yeliz ve Yakup, orta başarı düzeyindeki öğrenciler için Oya ve Onur, düşük başarı düzeyindeki öğrenciler için Demet ve Dursun olarak seçilmiştir.

Veri Toplama Araçları

Çalışmanın verileri sesli düşünme protokolü yoluyla ve dokümanlarla toplanmıştır. Sesli düşünme protokolünde iki etkinlik kartı ve bir görüşme formuna yer verilmiştir. Her bir etkinlik kartında öğrencilere kümeler konusundan bir sözel önerme sunulmuş ve bu önermeyi sesli düşünerek ispatlaması istenmiştir. Öğrencilere ispatlaması için sunulan önermeler şöyledir: *"Ayrık iki kümeden her biri diğerinin tümleyeninin alt kümesidir. Önermesinin doğruluğunu gösteriniz."*, *"İki kümenin kesişimleri birleşimlerine eşit ise kümeler eşit kümedir. Önermesinin doğruluğunu gösteriniz."* Seçilen önermelerin tamamı kümeler konusu ile ilgili olarak belirlenmiştir. Kümeler konusunun seçilmesinin iki temel nedeni vardır. Bunların ilki, sınıf öğretmenliği öğretim programında yer alan konular içerisinde ispatın öğretiminin yapılmasına en uygun olan konunun kümeler konusu olmasıdır. İkincisi ise kümeler konusunda yapılabilecek ispatların çok ileri düzey (uzmanlık düzeyinde) bilgi gerektirmemesidir. Uzmanlık düzeyinde bilgi gerektiren sorularda öğrencilerin bilgi düzeyi yeterli olmadığında ispat yapamayacak, böylece ispat süreci net olarak ortaya çıkarılamayacaktır. Bu çalışmada sınıf öğretmenliği öğrencilerinin bilgi düzeylerinden ziyade ispat yapma süreçleri ve gerekçelendirmeleri incelendiğinden uzmanlık düzeyinde bilgi gerektirmeyen bu konu seçilmiştir. Sorular hazırlandıktan sonra matematik eğitiminde ispat üzerine çalışmalar yapan bir uzmana sunularak soruların araştırmanın amacıyla uygun olup olmadığını değerlendirmesi istenmiştir. Uzman, soruların araştırmanın amacına uygun olduğunu belirtmiştir. Dokümanlarda ise sınıf öğretmenliği öğrencilerinin etkinlik kartında sunulan önermeler için yaptıkları ispatlar ele alınmıştır.

Verilerin Analizi

Çalışmada nitel veri analizi yöntemlerinden betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Betimsel analiz toplanan nitel verilerin daha önceden oluşturulmuş belli kategoriler doğrultusunda analize katılmasına dayanmaktadır. Bu çalışmada sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapma sürecindeki bilişsel süreçlerini incelemek için Tall'un (2004) geliştirip Tall ve Mejia-Ramos'un (2010) daha detaylı açıkladığı matematiğin zihinsel dünyasının gelişiminde olan somutlaştırma, sembolleştirme ve aksiyomlarla formel ifade etme bilişsel aşamaları kullanılmıştır. Bilişsel süreçlerin incelenmesindeki kategorilerin açıklamaları Tablo 1'de sunulmuştur.

Çalışmaya katılan sınıf öğretmenliği öğrencilerinin bilişsel süreçlerinin incelenmesinde Tablo 1'deki yapı referans alınmıştır. Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapma sürecindeki argümanlarını incelemek için Toulmin'in (1958) ispat yapma sürecindeki argüman üretme aşamaları kullanılmıştır.

Tablo 1

Bilişsel Süreçlerin İncelenmesindeki Kategoriler ve Bu Kategorilerin Açıklamaları

Kategori	Açıklaması
Somutlaştırma	• Önermede verilen ifadeleri şekille gösterme (Örneğin kümeleri Venn şeması ile gösterme) • Önermede verilen ifadeleri sözel olarak ifade etme (Örneğin önermenin doğruluğunu sözel olarak anlatma) • Önermede verilen ifadelerin doğruluğunu örneklerle açıklama
Sembolleştirme	• Önermede verilen ifadeleri sembolle yazma • Sembolik olarak ifade ettiği bir durumun karşılığını yine sembolik olarak açıklama (Örneğin $A \subset B$ ifadesini açıklamak için $\{x\|x \in A \Rightarrow x\epsilon B\}$ ifadesini yazma) • Somutlaştırma yaptığı bir durumu sembolle gösterme • Sembollerle işlem yapabilme (Örneğin $A \cap A'$ ifadesinin karşılığını $\emptyset$ olarak yazabilme)
Formel ifade etme	• İspatın geçerliği için yapılması gereken tüm süreçleri yerine getirme (Örneğin iki farklı denkleme ulaşıp, bu denklemleri karşılaştırıp sonuca ulaşma)

Argümanların incelenmesinde kullanılan kategorilerin açıklamaları Tablo 2’de sunulmuştur.

Tablo 2

Argümanların İncelenmesindeki Kategoriler ve Bu Kategorilerin Açıklamaları

Kategori	Açıklaması
İddia	• İspatın doğruluğunu savunmak için ortaya atılan hipotez ve hüküm iddiayı oluşturur. (Örneğin, ispatın doğru, yanlış olduğunu savunması)
Verinin sunumu	• İddiayı doğrulayıcı gerekçenin sunulması (İddianın doğruluğunu göstermeye yönelik gerekçelerin sunulması)
Haklı neden	• Sunulan gerekçeyi doğrulayıcı ifadeler sunma (Gerekçelerini destekleyici ifadelere yer verilmesi)
Destekleyen ifade/Niteleyiciler	• Gerekçenin doğruluğunu destekleyen ifadeler sunma. Niteleyicilerin bazı türleri destekleyen ifade olarak açıklanmaktadır.
Sınırlılıkları çürütme	• Olası alternatiflerin çürütülmesi aşamasıdır. Olabilecek tüm alternatifler elenerek doğru sonuç desteklenir.

Çalışmaya katılan sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapma sürecindeki argümanlarının incelenmesinde Tablo 2’deki yapı referans alınmıştır. Çalışmanın verilerinin analiz edilmesinde ilk olarak katılımcıların sesli düşünme protokolleri transkript edilerek birinci araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Yapılan kodlama Tablo 1 ve Tablo 2’de sunulan yapılar doğrultusunda kategorileştirilmiştir. Ardından aynı işlemi ikinci araştırmacı yapmış ve böylece iki ayrı kodlama oluşturulmuştur. İki araştırmacı bir araya gelmiş ve sadece her ikisinin ortak olarak belirledikleri kodlar ve kategoriler bu çalışmada kod olarak sunulmuştur. Ardından etkinlik kartları incelenmiş ve kodları destekleyici olan bazı örnekler raporda sunulmuştur.

Geçerlik ve Güvenirlik

Araştırmanın geçerliği için dış geçerlik ve iç geçerliğe yönelik çalışmalar yapılmıştır. Çalışmanın dış geçerliğini sağlamak amacıyla çalışma grubu detaylı açıklanmış ve katılımcıların ifadelerinden doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Çalışmanın iç geçerliği için farklı veri toplama araçları bir arada kullanılmıştır.

Çalışmanın güvenirliğini sağlamak için de dış güvenirlik ve iç güvenirliğe yönelik işlemler yapılmıştır. Çalışmada dış güvenirliği sağlamak için veriler araştırmacıların görüşlerine yer verilmeden doğrudan sunulmuştur. İç güvenirliğini sağlamak için araştırma sürecinin kendi içerisinde tutarlı olması (araştırma modeli, çalışma grubu, veri toplama araçları ve toplanan verilerin analizi) sağlanmıştır.

Bulgular

Öğrencilerin İspat Yapmada Kullandıkları Bilişsel Yapılar

Somutlaştırmaya yönelik bilişsel beceriler. Çalışmaya katılan öğrencilerden Yeliz verilen önermeyi somutlaştırmak için şekil çizmiştir. Yeliz'in görüşmede kullandığı *"…çizdiğim şekil ile model yoluyla yaptığım ispatın doğruluğunu kontrol etmiş oluyorum"* ifadesinden ispatın doğruluğunu kontrol etmek için şekil çizdiği anlaşılmaktadır. Yeliz'in etkinlik kartı incelendiğinde önermede ilk olarak şekil çizdiği ardından sembolik işlemler yaptığı anlaşılmaktadır. Bu durum Yeliz'in söyledikleri ile yaptıklarının uyumlu olduğunu göstermektedir. Oya ise önermeyi dikkatle okuduktan sonra *"Öncelikle soruyu okuyup anlamaya çalışıyorum. Şimdi şeklini çizeceğim… Daha iyi anlayabilmek için şekil çizdim."* ifadelerini kullanarak soruyu daha iyi anlamak için şekil çizdiğini ifade etmiştir. Önermenin ispatına şekil çizerek başlayan Onur'da *"…Şimdi ben ilk önce şekillerle ifade ediyorum. Bunu aklımda kalsın diye yapıyorum. Çünkü gelecekte bu tarz bir soruyla karşılaşırsam hatırlamak istiyorum. Bunlar ayrık küme olduğundan ortak elemanları boş küme olarak ifade ettim."* ifadeleriyle aklında kalmasını sağlamak için şekil çizdiğini ifade etmiştir.

Demet'in etkinlik kartında ve sesli düşünme esnasında kullandığı ifadelerden somutlaştırma için hem şekil çizdiği hem de örneklerle doğruluğuna karar verdiği anlaşılmaktadır. Demet'in *"…B kümesi ile A kümesi ayrık kümeler ise B, A'nın tümleyeninin alt kümesidir. Bunlar ayrık küme olduğu için kesişimleri yoktur. Sonra B'nin elemanı x ise x, A'nın elemanı olmaz."* ifadeleri onun kümeleri temsilen harfler kullanarak (örnek vererek) somutlaştırma yaptığını göstermektedir. Örneklere dayalı olarak açıklama yapabilen Dursun'da aşağıdaki ifadeleri kullanmıştır:

> "Ben bu soruyu çözemem. Çünkü hocam ayrık iki kümenin her biri diğerinin tümleyeninin alt kümesidir diyor. Ben bunları örneklerle anlayabiliyorum ama sembollerle nasıl yazacağımı bilmiyorum. Yani bu ifadeyi sembolik olarak ifade edemedim. Ama ayrık iki küme dediği için kesişimleri boş küme olan A ve B gibi iki küme varsa birinin diğerinin tümleyeninin alt kümesi olduğunu anlayabiliyorum. Örneğin ikisini kapsayan bir C kümesi varsa birinin tümleyeni dediğimizde C kümesinde yer alıp o kümede yer alamayan tüm elemanları dâhil etmiş oluruz. Bu elemanların içinde diğer kümede vardır."

Katılımcının ifadeleri incelendiğinde örnekle beraber zihninde önermenin doğruluğunu canlandırdığı ancak sembolik ifadelere geçemediği anlaşılmaktadır.

İkinci önerme incelendiğinde Yeliz'in yine şekil çizerek doğruluğunu gösterdiği anlaşılmaktadır. Yeliz ile araştırmacı arasında geçen aşağıdaki diyalog Yeliz'in şekil çizmesinin gerekçesini göstermektedir:

Yeliz: [Soruyu okuyor] … Önce şekil üzerinde önermenin doğruluğunu göstereyim.
Araştırmacı: Şekil üzerinde doğruluğunu göstermek size ne sağlıyor?
Yeliz: Mantık yürütme ve ispat sonrasında doğruluğunu kontrol etmemi sağlıyor.

Diyalog incelendiğinde Yeliz'in ilk olarak önermenin doğruluğunu kontrol etmek için şekil çizdiğini, ardından çizdiği şekil doğrultusunda ispatın doğruluğunu gözden geçirdiği anlaşılmaktadır. Bu durumu *"Hemen şekil çiziyorum. Önermeyi anlayabilmek için bunu yapıyorum."* cümleleriyle açıklamıştır. Onur ise hem şekille hem de örneklerle somutlaştırma yapmıştır. Onur'un ifadeleri *"Bunu da önce şekille ifade ediyorum. İkisinin kesişimine C dedim. Ondan sonra eşittir dedim."* hem şekille hem de örnekle somutlaştırma yaptığını desteklemektedir.

Bilişsel yapılardan somutlaştırmaya yönelik ulaşılan kodlar, bu kodların hangi önermeler için sergilendiği ve hangi katılımcıların bu kodları sergilediği Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3
Somutlaştırma Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

	Yeliz		Yakup		Oya		Onur		Demet		Dursun		*f*
	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	
Şekil çizme	X	X	X		X	X	X	X	X	X			9
Örneklerle gösterme								X	X		X		3

Ö: Önerme

Tablo 3 katılımcı öğrencilerin daha çok şekil çizerek somutlaştırma yaptığını göstermektedir (*f*=9). Her iki önerme içinde öğrencilerin çoğu şekil çizerek önermenin doğruluğunu göstermiş başka bir ifade ile somutlaştırma yapmıştır. Buna rağmen birinci önermede şekil çizerek doğruluğunu gösterenlerin sayısı, ikinci önermede şekil çizerek doğruluğunu gösterenlerin sayısından daha fazladır. Tabloda dikkat çeken bir başka ayrıntıda kız öğrencilerin tamamının her iki önermede de şekil çizerek somutlaştırma yapmasıdır. Örnekler göstererek somutlaştırma ise her iki önerme için de oldukça az sergilenmiştir (*f*=3).

Sembolleştirmeye yönelik bilişsel beceriler. Çalışmaya katılan öğrencilerden Yeliz ezberlediği şekilde sembolleştirme yapmaktadır. Yeliz önermeyi doğru sembolleştirmesine karşın sözel olarak yanlış ifade etmiştir. Yeliz ile araştırmacı arasındaki diyalog şöyledir:

Yeliz: … Ayrık iki küme olduğu için ikisi de boş küme olacak. Yani $A \cap B = \emptyset$.
Araştırmacı: Ayrık iki küme olduğu için ikisinin de boş küme olduğunu söylediniz, sonra $A \cap B = \emptyset$ yazdınız. Söylediğiniz ile yazdığını tutarlı mı, ikisi aynı şey mi?
Yeliz: Evet aynı şey…

Diyalog incelendiğinde Yeliz'in ifadeyi doğru sembolleştirdiği ancak yanlış ifade ettiği veya düşündüğü anlaşılmaktadır. Bu durum Yeliz'in daha önceden karşılaştığı sembolik ispatları ezberlemesinden kaynaklanmış olabilir. Çünkü sesli düşünme protokolünün devam eden bölümünde Yeliz'e önermenin neden doğru olduğu sorulduğunda *"Derste hocanın söylediği bilgi doğrultusunda doğru olduğunu düşünüyorum."* ifadesini kullanmıştır. Bu durum Yeliz'in ezberlediği şekilde sembolleştirme yaptığını göstermektedir.

Sesli düşünme protokolünde Yeliz'in tanımları sembolik olarak yazabildiği görülmüştür. Yeliz'in sesli düşünme protokolünde kullandığı "$A \cap B = \emptyset$ [Etkinlik kartında bu bölümü göstererek] *ifadesini sembolik olarak yazayım.* $x|x \in A$ *için* $x \notin B$ [Hem sesli olarak söyler hem yazar] *olarak yazılır…"* ifadesinden tanımları sembolik olarak yazabildiği anlaşılmaktadır. Oya'da tanımları sembolik olarak yazmıştır. Bu durum sesli düşünme protokolünde Oya ile araştırmacı arasında geçen diyalogda açıkça görülmektedir. Diyalog şöyledir:

Oya: …A kesişim B eşittir boş küme dedim. Çünkü kümelerin ayrık kümeler olduğu söylenmiş. Sonra yine soruya göre A alt kümesidir B'nin tümleyeni veya B alt kümesidir A'nın tümleyeni yazdım. Daha sonra x öyle ki şeklinde açıyorum.

Araştırmacı: Neden x öyle ki diye açtınız?

Oya: Küme ispatlarında böyle yazılması gerektiğini derste öğrendik. Ayrık kümenin tanımından x∈A ise x∈B olacağını yazıyorum. Sonra x∈B ise x∈A' yazdım.

Yeliz'in sesli düşünme protokolünde kullandığı ifadelerden ve etkinlik kartında yazdıklarından sembolik ifadeden tanıma geçebildiği anlaşılmaktadır. Yeliz'in kullandığı *"…Aynı zamanda* $x|x \in B$ *için* $x \notin A$ [Hem sesli olarak söyler hem yazar] *olur.* $A \subset B'$ [Hem sesli olarak söyler hem yazar] *yazarım."* ifadeleri sembolik ifadelerden tanıma geçebildiğini göstermektedir. Benzer şekilde Yakup'unda sesli düşünme protokolünde araştırmacının sorduğu *"Bu sembollerden alt kümeye nasıl geçiş yaptınız?"* sorusuna verdiği şu cevaptan anlaşılmaktadır: *"İlk söylediklerimle. x ∈B ise x ∉A ise zaten buradan B⊂A' oluyor. Yani bu tanımdan geliyor. Altkümenin tanımından."*

İkinci önerme incelendiğinde Onur'un tanımlardan sembolik ifadelere geçiş yapabildiği görülmektedir. Bu durum Onur'un *"…Sonra, A∩B yi x∈A ve x∈B şeklinde açıyorum. Sonra A∪B'yi x∈A ve x∈B'yi de açıyorum. Bunlarda birbirine eşittir… Bu kadar."* cümlelerinden anlaşılmaktadır. Bu beceriyi sergilediği belirlenen Yeliz'in hem sembolik ifadelerden tanımlara hem de tanımlardan sembolik ifadelere geçiş yapabildiği görülmektedir. Yeliz ile araştırmacı arasında geçen şu diyalog bu durumu göstermektedir:

Yeliz: … A ∩ B = A ∪ B dedim. Sonra bunlar sembolik olarak açıklıyorum [Her birini sembolik olarak yazar].

Araştırmacı: Neden böyle yaptınız?

Yeliz: Birleşime göre yaptığımız zaman ya A ⊂ A ∪ B ya da B ⊂ A ∪ B olacak.

Araştırmacı: Neden böyle olacak. Yani A'yı veya B'yi alt küme olarak ifade etmenizdeki amaç nedir?

Yeliz: Şekil üzerinde göstermiştik ya birleşim olduğunda bu alt küme olma özelliğini kullanıyoruz.

Yakup'un etkinlik kartı ve sesli düşünme protokolü de hem sembolik ifadelerden tanımlara hem de tanımlardan sembolik ifadelere geçiş yapabildiği göstermiştir. Sesli düşünme protokolünde Yakup'un bu becerileri sergilediğini şu ifadeler göstermektedir:

"Kesişimleri birleşimlerine eşit diyor. Ben önce birleşimi göstereyim, sonra da kesişimi… Açarak yazdım yani bunları. Şimdi birleşimde $x \in A$ veya $x \in B$ oluyordu. Kesişimde de $x \in A$ ve $x \in B$ olması gerekiyor. Bu ikisi birbirine eşit bunu biliyoruz. $x \in A$ ise $x \in B$'dir. O halde $A \subset B$ olur. $x \in B$ ise $x \in A$'dır. B'de A'nın alt kümesi oluyor. O halde $A=B$ olur."

Yakup her iki beceriyi kullanmasına karşın ispatı doğru değildir. Yeliz ve Yakup gibi Oya'da hem sembolik ifadelerden tanımlara hem de tanımlardan sembolik ifadelere geçiş yapabilmiştir. Oya'nın şu ifadeleri bu durumu desteklemektedir:

"Hemen şekil çiziyorum. Önermeyi anlayabilmek için bunu yapıyorum. Daha sonra sembollerle $A \cap B$ yazıyorum ve x öyle ki diyerek bunu açıklıyorum. $A \cup B$ içinde aynını yazıyorum ve açıklıyorum. Daha sonra $A \subseteq B$ yazdım. Yani ikisi de birbirinin öz altkümesi olabiliyorsa $A=B$ olduğunu söyleyebilirim."

Oya'nın ifadeleri de hem sembolik ifadelerden tanımlara hem de tanımlardan sembolik ifadelere geçiş yapabildiğini göstermesine karşın yaptığı ispat doğru değildir.

Bilişsel yapılardan sembolleştirmeye yönelik ulaşılan kodlar, bu kodların hangi sorular için sergilendiği ve hangi katılımcıların bu kodları sergilediği Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4

Sembolleştirme Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

	Yeliz		Yakup		Oya		Onur		Demet		Dursun		*f*
	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	
Ezberlediği şekilde sembolleştirme	X												1
Tanımları sembolik olarak yazma	X	X	X	X	X	X	X	X	X				9
Sembolik ifadelerden tanıma geçebilme	X	X	X	X	X	X	X						7

Tablo 4 katılımcı öğrencilerin sembolleştirme kategorisinde daha çok tanımları sembolik olarak yazma becerisini sergilediğini göstermektedir (*f*=9). Bunun ardından en sık sergilenen kod sembolik ifadelerden tanıma geçebilmedir (*f*=7). Sembolleştirme kategorisinde en az sergilenen kod ezberlediği şekilde sembolleştirmedir (*f*=1). Bu kategorideki becerilerin yüksek başarı düzeyinden düşük başarı düzeyine doğru sayıca azaldığı görülmektedir.

Formel ifade etmeye yönelik bilişsel beceriler. Yakup sembolik işlemleri sistematik bir şekilde yazıp ifade etmiştir. Yakup'un sesli düşünme protokolünde ispatı yürütürken kullandığı aşağıdaki ifadeler bu durumu desteklemektedir:

"Her biri diğerinin alt kümesi ise $x \in A$ ise $x \notin B'$dir. Ya da $x \in A$ ise $x \in B'$dir. Bu nedenle A, B' nin alt kümesi oluyor. $x \in B$ ise $x \notin A$, $x \in B$ ise $x \in A'$. Buradan $B \subset A'$ olur. Her biri diğerinin tümleyeninin alt kümesi olur."

Diyalog incelendiğinde Yakup'un ispat adımlarını doğru bir şekilde yürüttüğü ve sistematik olarak ilerlediği görülmektedir.

İkinci önermede Dursun'un ispat yapma sürecinde hipotez ve hükmü yazdığı belirlenmiştir. Dursun'un *"Benim buradan anladığım $A \cap B = A \cup B$ ise $A = B$ midir? Bunun içinde ben bunların eşitliğini kanıtlamak istiyorsam birbirine eşit olduğunu göstermeliyim."* ifadeleri hipotez ve hükmü belirlediğini göstermektedir. Yeliz sembolik işlemleri sistematik bir şekilde yazıp ifade etmiştir. Yeliz'in sistematik işlem yaptığı etkinlik kartının yanı sıra *"Tamamen sistematik işlem yaptım."* ifadesinden de anlaşılmaktadır.

Bilişsel yapılardan formel ifade etmeye yönelik ulaşılan kodlar, bu kodların hangi sorular için sergilendiği ve hangi katılımcıların bu kodları sergilediği Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5
Formel İfade Etme Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

	Yeliz		Yakup		Oya		Onur		Demet		Dursun		*f*
	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	
Sistematik olarak ispat yapma		X	X		X		X						4
Hipotez ve hükmü yazma												X	1

Tablo 5 öğrencilerin formel ifade etme kategorisindeki bilişsel yapılarına yönelik iki kod belirlenmiştir. Bu kodlardan sistematik olarak ispat yapma kodu daha sık sergilenirken (*f*=4), hipotez ve hükmü yazma kodu daha az sergilenmiştir (*f*=1).

İspatın Doğruluğuna Yönelik Öğrencilerin Ürettikleri Argümanlar

İspatın doğruluğuna yönelik iddialar. Öğrencilerin ispatlarının doğruluğuna yönelik ortaya attıkları iddialar doğru, yanlış ve kararsızım olarak üç kodda ele alınmıştır. İddianın doğruluğuna yönelik iddiaların katılımcılara göre dağılımı Tablo 6'da sunulmuştur.

Tablo 6
İspatın doğruluğuna yönelik iddialar kategorisinde ulaşılan kodların katılımcılara göre dağılımı

	Yeliz		Yakup		Oya		Onur		Demet		Dursun		f
	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	
Doğru	X	X	X	X			X	X				X	7
Yanlış					X	X				X	X		4
Kararsızım									X				1

Tablo 6 incelendiğinde yaptıkları ispatın doğru olduğunu iddia edenlerin sayısının daha fazla olduğu görülmektedir. Doğrunun sergilenme sıklığı diğer kodlardan daha fazla bulunmuştur (*f*=7). Bunu yanlışın sergilenme sıklığı izlerken (*f*=4), en az sergilenen kod kararsızımdır (*f*=1).

İddianın doğruluğuna yönelik öğrencilerin sundukları veriler. Birinci önermede Yeliz ispatının doğruluğunu hem dersin öğretim elemanına hem de örneklere (çizdiği şekle) dayandırmıştır. Yeliz'in *"Derste hocanın söylediği bilgi doğrultusunda doğru olduğunu düşünüyorum. Ayrıca çizdiğim şekilde model yoluyla da doğruluğunu kontrol etmiş oldum."* ifadeleri sunduğu verileri göstermektedir. Dursun sembolik ifade kullanmadığı için ispatın yanlış olduğunu iddia etmiştir. Dursun şu ifadelere yer vermiştir: *"Ben bu soruyu çözemem… Ben bunları örneklerle anlayabiliyorum ama sembollerle nasıl yazacağımı bilmiyorum. Yani bu ifadeyi sembolik olarak ifade edemedim."* İspatının doğru olmadığını düşünen Oya *"Bence olmaz. Sadece açıklama bence. Çok basit görünüyor dolayısıyla ispat olmaz."* ifadelerini kullanmıştır.

İkinci önermede Yeliz ispatının doğruluğunu hem sistematik ispat yapmasına hem de dersin öğretim elemanına dayandırmıştır. Yeliz'in *"Hoca da ispatları böyle göstermişti. Ayrıca ben sistematik bir şekilde tüm işlemleri yaptığım için ispatım doğru olmalı."* ifadeleri sunduğu verileri göstermektedir. Yakup'ta ispatının doğruluğunu dersin öğretim elemanına dayandırmıştır. Yakup'un *"Evet ispatım geçerli… Hocanın söylediği formüllere göre."* ifadeleri durumu desteklemektedir. İspatının doğru olduğunu iddia eden Dursun *"İspatım yeterli. Çünkü daha fazlasını yapamam."* cümleleriyle ispatının doğru olduğunu savunmuştur. Benzer şekilde Onur'da *"Çünkü aklıma başka bir şey gelmedi. Dolayısıyla bu kadarının doğru olduğunu düşünüyorum."* cümleleriyle ispatın doğruluğunu savunmuştur. İlk önermede olduğu gibi bu önermede de ispatının doğru olmadığını düşünen Oya *"Doğru değil, daha çok açıklama gibi oldu. Sonuca bağlayamadım…"* cümlelerini kullanmıştır. Bu ifadeler Oya'nın sembol kullanmadığı için ispatının doğru olmadığını düşündüğünü göstermektedir.

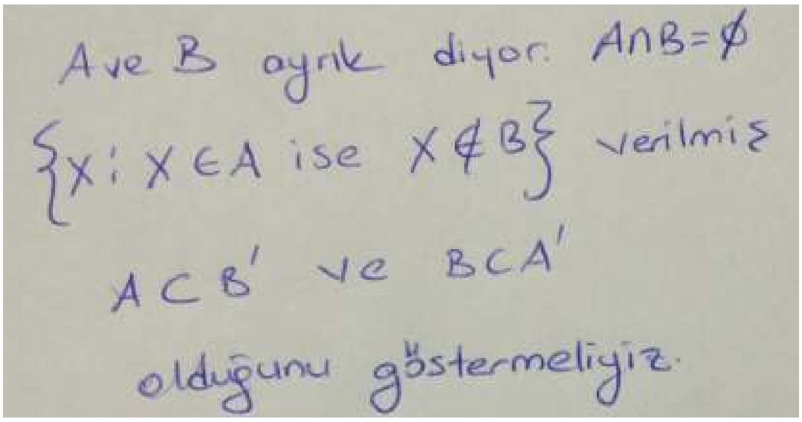
İddianın doğruluğuna yönelik öğrencilerin sundukları verilerin katılımcılara göre dağılımı Tablo 7'de sunulmuştur.

Tablo 7
Öğrencilerin Sundukları Veriler Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

	Yeliz		Yakup		Oya		Onur		Demet		Dursun		*f*
	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	
Dersi veren öğretim elemanına dayandırma	X			X									2
Örneklere dayandırma	X												1
Sembolik ifadelere dayandıramama					X						X	X	3
Sistematik çalışmaya dayandırma		X											1
Alternatif üretemediği için doğru olduğunu düşünme								X					1

Tablo 7 incelendiğinde bu kategoride en sık sergilenen kodun sembolik ifadelere dayandıramama olduğu belirlenmiştir (*f*=3). Bu kodu dersi veren öğretim elemanına dayandırma ve alternatif üretemediği için doğru olduğunu düşünme kodları izlemektedir (*f*=2). En az sergilenen kodlar ise örneklere dayandırma ve sistematik çalışmaya dayandırmadır (*f*=1).

Öğrencilerin sundukları verileri doğrulayıcı ifadeler. Çalışmaya katılan öğrencilerden Dursun'un ispatın hipotez ve hükmünü sembolik olarak yazdığı belirlenmiştir (Bkz. Şekil 2).



Şekil 2. Dursun'un 1. önermede yazdığı hipotez ve hüküm

Dursun ortaya attığı iddiada sembolik ifadelere dayandıramadığı için ispatının geçerli olmadığını belirtmişti. Dursun'un bu ifadesinden iddiasını doğrulamaya yönelik işlem yaptığı (İspatın hipotez ve hükmünü sembolik yazdığı) anlaşılmaktadır.

Onur ise ispat yaparken *"Bunu aklımda kalsın diye yapıyorum. Çünkü gelecekte bu tarz bir soruyla karşılaşırsam hatırlamak istiyorum."* ifadelerine yer vermiştir. Bu ifadeler Onur'un analojik akıl yürütmelerden yararlandığını başka bir ifade ile öğrendiği bir durumu yeni durumlara genelleyebildiğini göstermiştir. Onur bu düşüncesini doğrulayıcı ifade olarak sunmamış olsa da Onur'un düşüncesi onun analojik akıl yürütmelerden yararlanarak ispat yaptığına işaret etmektedir. Onur'un kullandığı bir başka doğrulama yolu ise ispatı tekrar yaparak sonucu kontrol etmedir. Onur *"…İlk yolda ispat ama bir yolla daha doğruluğunu gösterip sağlamasını yapmak istedim. Garanti olsun istiyorum…"* cümleleriyle ispatının doğrulamasını yapmak için ikinci bir yolla ispat yaptığını göstermiştir.

Öğrencilerin sundukları verileri doğrulayıcı ifadelerin katılımcılara göre dağılımı Tablo 8'de sunulmuştur.

Tablo 8

Öğrencilerin Sundukları Verileri Doğrulayıcı İfadeler Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

	Yeliz		Yakup		Oya		Onur		Demet		Dursun		*f*
	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	
İspatın hipotez ve hükmünü sembolik olarak yazma											X		1
Analojik akıl yürütmelerden yararlanma							X						1
İspatı tekrar yaparak sonucu kontrol etme								X					1

Tablo 8 incelendiğinde bu kategoride yer alan tüm kodların eşit sıklıkta sergilendiği anlaşılmıştır (*f*=1). Öğrenciler iddialarının doğruluğunu savunacak ifadelere çok fazla yer vermemiştir. İddialarını sunmuşlar ancak bunu destekleyici ifadelerde problem yaşamışlardır. Onur her iki önerme içinde iddiasını doğrulamak için gerekçeler sunabilmiştir.

Öğrencilerin sınırlılıkları çürütme yolları. Yakup önermede verilen hükme ulaştığı için olası alternatifleri çürüttüğünü düşünmüştür. Yakup'un *"…Çünkü birbirlerinin alt kümeleri olduklarını gördüm. Bu nedenle doğru olur."* cümleleri olası alternatifleri çürüttüğünü (her iki kümenin birbirinin alt kümesi olduğu için eşit kümeler olmaları) göstermiştir.

Çalışmaya katılan öğrencilerden Yeliz tüm ispat süresince işlemleri kontrol ederek sistematik olarak yürütmüş bu nedenle olası tüm alternatifleri çürütmüştür. Yeliz'in kullandığı *"…Ben sistematik bir şekilde tüm işlemleri yaptığım için ispatım doğru olmalı."* ifadelerden olası çözümleri çürüttüğü anlaşılmıştır. Dursun ise önermede verilen hükme ulaştığı için olası alternatifleri çürüttüğünü düşünmüştür. Dursun'un *"Hem de iki eşit ifade elde ettim. Fazlasına gerek duymadım… Bence ispatın doğruluğunu göstermede bu ifade (A=B elde etmiş olmam) yeterli olur…"* ifadeleri olası alternatifleri çürüttüğünü göstermiştir. Oya işlem aşamalarında hangi işlemi neden yaptığını tam olarak açıklayamadığı için olası tüm alternatifleri ortadan kaldıramadığını bu nedenle yaptığı işlemlerin ispatın geçerli olmasını sağlamayacağını düşünmektedir. Oya'nın *"Değil, daha çok açıklama gibi oldu. Sonuca bağlayamadım… Sonuca bağlamış olsaydım, neyin nereden geldiğini açıklayabilseydim ispat olurdu."* ifadelerinden bu durum anlaşılmaktadır.

Öğrencilerin yaptıkları ispattaki sınırlılıkları (alternatifleri) çürütme yolları Tablo 9'da sunulmuştur.

Tablo 9
Sınırlılıkları Çürütme Yolları Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

	Yeliz		Yakup		Oya		Onur		Demet		Dursun		*f*
	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	1.Ö	2.Ö	
Önermede verilen hükme ulaştığı için olası alternatifleri çürüttüğünü düşünme			X		X			X				X	4
Tüm ispat süresince işlemleri kontrol eder		X											1
Yaptığı işlemlerin gerekçelerini açıklama						X							1

Tablo 9 incelendiğinde öğrencilerin daha çok önermede verilen hükme ulaştığı için olası alternatifleri çürüttüğünü düşündükleri belirlenmiştir (*f*=4). Bu kategoride yer alan diğer kodların eşit sıklıkta sergilendiği anlaşılmıştır (*f*=1).

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapma sürecindeki bilişsel yapıları ve ortaya koydukları argümanları incelemeyi amaçlayan bu çalışmanın sonucunda öğrencilerin ispat yapma sürecinde somutlaştırma, sembolleştirme ve formel ifade etme bilişsel yapılarını; iddianın ortaya atılması, verinin sunumu, doğrulayıcı ifadeler ve sınırlılıkları çürütme argümanlarını kullandıkları tespit edilmiştir.

Öğrencilerin ispat yapma sürecindeki bilişsel yapıları ele alındığında somutlaştırma kategorisinde şekil çizme ve örneklerle gösterme kodlarına ulaşılmıştır. Bunun nedeni olarak öğrencilerin okul matematiğinden getirdikleri problem çözme alışkanlıklarından kopamamış olmaları gösterilebilir. Başka bir ifade ile öğrencilerin ispat yapma düşüncesinden ziyade problem çözme düşüncesi ile hareket ettikleri söylenebilir. Öztürk'te (2017) matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma sürecini bilişsel açıdan incelediği çalışmasında öğretmen ve öğretmen adaylarının cebir ispatlarında sekil çizmediğini ancak geometri ispatlarında şekil çizdiklerini belirlemiştir. İspat yapmaya yönelik becerileri inceleyen pek çok araştırmada en alt düzey beceri olarak veya soruyu anlamak için katılımcıların şekil çizdiklerini belirlemiştir (Komatsu, 2016; van Garderen, 2006; Zazkis, Weber ve Mejía-Ramos, 2015). Bu çalışmada öğrencilerin somutlaştırma kategorisinde şekil çizme becerisi sergilemelerinin alan yazını destekliği söylenebilir. Somutlaştırma kategorisinde ulaşılan diğer kod örneklerle göstermenin de alan yazını desteklediği söylenebilir. Alan yazındaki pek çok çalışma öğrencilerin veya öğretmenlerin önermenin doğruluğunu ispatlamada örnekleri kullandıklarını göstermiştir (Harel ve Sowder, 1998; Öztürk, 2017).

İspat yapma sürecinde bilişsel yapılardan bir diğeri sembolleştirmedir. Sembolleştirme kategorisinde ezberlediği şekilde sembolleştirme, tanımları sembolik olarak yazma ve sembolik ifadelerden tanıma geçebilme kodlarına ulaşılmıştır. Çalışmaya katılan öğrencilerden birisinin ezberlediği şekilde sembolleştirme yaptığı belirlenmiştir. Alan yazında pek çok çalışmada öğrencilerin ispatları ezberleyerek yaptıkları belirlenmiştir (Dede ve Karakuş, 2014; Güven, Çelik ve Karataş, 2005; Öztürk ve Kaplan, 2019). Bu bağlamda çalışmada öğrencilerin ezberlediği şekilde sembolleştirme yapmalarının alan yazını desteklediği söylenebilir. Sembolleştirme kategorisindeki diğer kodların (tanımları sembolik olarak yazma ve sembolik ifadelerden tanıma geçebilme) da alan yazını desteklediği söylenebilir. Doruk ve Kaplan (2015) ise yaptıkları çalışmada matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapma sürecinde sembolik ifadeler kullanmaktan uzak olduklarını belirlemiştir. Buna karşın alan yazındaki pek çok çalışmada öğrencilerin ispat yapma sürecinde önermeleri sembolik yazdığı belirlenmiştir (Fukawa-Connelly, 2012; Hanna, 1995).

Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin bilişsel yapılarında formel ifade etme kategorisinde sistematik olarak ispat yapma ile hipotez ve hükmü yazma kodlarına ulaşılmıştır. Alan yazında yapılan çalışmalarda öğrencilerin ispat yapma sürecinde sistematik ispat yapma ile hipotez ve hükmü yazma becerilerini sergiledikleri belirlenmiştir (Radford, 2008; Smith ve Kosslyn, 2014). Öztürk ve Kaplan (2019) matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma sürecinde hipotez ve hükmü belirlediklerini tespit etmiştir. Bu bağlamda formel ifade etme kategorisindeki kodların alan yazını desteklediği söylenebilir.

İspat yapma sürecindeki argümanlara yönelik elde edilen kategoriler: ispatın doğruluğuna yönelik iddialar, iddiaları destekleyen veriler, verileri doğrulayıcı ifadeler ve sınırlılıkları çürütme kategorilerine ulaşılmıştır.

Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispatın doğruluğuna yönelik iddiaları doğru, yanlış ve kararsızım olarak sınıflandırılmıştır. Katılımcı sınıf öğretmenliği öğrencilerin çoğu ispatın doğruluğuna yönelik görüş belirtirken, sadece bir sınıf öğretmenliği öğrencisi kararsız kalmıştır. Alan yazındaki pek çok çalışmada, katılımcıların önermenin doğru olup olmadığını belirleyebildikleri tespit edilmiştir (Aydemir ve Kubanç, 2014; Öztürk, 2017; Schraw, 1998). Öztürk ve diğerleri (2018) sınıf öğretmenliği öğrencilerinin kümeler konusunda yaptıkları ispatları inceledikleri çalışmada, katılımcıların ispatlarının doğru olup olmadığına karar vermekte güçlük yaşadıklarını ve karar veremediklerini belirlemiştir. Dede ve Karakuş'ta (2014) ispatın doğruluğuna karar verememenin ritüel ispat şeması olduğunu belirtmiştir. Bu doğrultuda çalışmada ulaşılan ispatın doğruluğuna yönelik iddiaların alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Çalışmaya katılan sınıf öğretmenliği öğrencilerinin iddialarını desteklemek amacıyla sundukları veriler kategorisinde dersi veren öğretim elemanına dayandırma, örneklere dayandırma, sembolik ifadelere dayandırma, sistematik çalışmaya dayandırma ve alternatif üretemediği için doğru olduğunu düşünme kodları bulunmuştur. Sınıf öğretmenliği öğrencilerinden bazıları ispatının doğruluğunu dersi veren öğretim elemanına dayandırmıştır. İspatını öğretmen veya ders kitabı gibi bir otoriteye dayandırma otoriter ispat şeması olarak adlandırılmaktadır (Dede ve Karakuş, 2014). Alan yazındaki pek çok araştırmada katılımcıların otoriteye dayalı ispat yaptıkları belirlenmiştir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016; Harel ve Sowder, 1998; Nool, 2012; Öztürk, 2017). Bu bağlamda öğrencilerin ispatların doğruluğunu dersi veren öğretim elemanına dayandırmanın alan yazını desteklediği söylenebilir. Nitekim bu çalışmanın bilişsel yapılar temasında ulaşılan ezberlediği yolla sembolleştirme yapma kodu da bu bulguyu desteklemektedir. Çalışmaya katılan Sınıf öğretmenliği öğrencilerinden birisi ispatının doğruluğunu savunmada örneklere dayandırmıştır. İspatın doğruluğunu örneklere dayandırma tümevarımsal ispat şeması olarak adlandırılmaktadır (Dede ve Karakuş, 2014). Alan yazında pek çok çalışmada öğrencilerin tümevarımsal ispat şemasına göre ispat yaptıkları belirlenmiştir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016; Harel ve Sowder, 1998; Öztürk, 2017). Bu doğrultuda çalışmada Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin örneklerle ispatlarının doğruluğunu değerlendirmelerinin alan yazınla örtüştüğü söylenebilir. Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispatlarının doğruluğunu iddia etmedeki gerekçelendirmelerinden birisi de sistematik çalışmadır. İspatın doğruluğunu değerlendirmede sistematik ispat yapma aksiyomatik ispat şemasının bir bölümüdür (Dede ve Karakuş, 2014). Alan yazındaki bazı çalışmalarda öğrencilerin ispatlarını değerlendirmede aksiyomatik ispat şemalarını kullandıkları tespit edilmiştir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016; Harel ve Sowder, 1998; Öztürk, 2017). Çalışmaya katılan Sınıf öğretmenliği öğrencilerinden bazılarının önermelerinin yanlış olduğunu iddia etmelerinin nedeninin sembolik ifadelere dayandıramama olduğu belirlenmiştir. Doruk ve Kaplan'da (2015) öğrencilerin sembolik ifade kullanmakta güçlük yaşadıklarını belirlemiştir. Çalışmaya katılan Sınıf öğretmenliği öğrencilerinden bazıları da başka bir çözüm yolu üretemedikleri için iddialarının doğru olduğunu düşündüklerini belirtmiştir. Demircioğlu ve Polat (2016) alternatif ispat yolları kullanmanın öğrencilerin anlamalarını geliştireceğini ifade etmiştir. Bu çalışmada Sınıf öğretmenliği öğrencileri alternatif üretemedikleri için ispatlarının doğruluğu test edememiş bu nedenle doğru olacağını kabul etmişlerdir. Bu bağlamda ulaşılan sonucun Demircioğlu ve Polat'ın (2016) çalışmasını desteklediği söylenebilir.

Çalışmaya katılan Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin sundukları verileri doğrulayıcı ifadeleri ispatın hipotez ve hükmünü sembolik yazma, analojik akıl yürütmelerden yararlanma ve ispatı tekrar yaparak sonucu kontrol etme kodlarına ulaşılmıştır. Çalışmaya katılan bir Sınıf öğretmenliği öğrencisi ispatının gerekçelendirmesini desteklemek amacıyla ispatın hipotez ve hükmünü sembolik olarak yazdığını ifade etmiştir. Bu bulgu çalışmada bilişsel yapılardan formel ifade etme kategorisindeki hipotez ve hükmü yazma bulgusuyla örtüşmektedir. Öztürk'te (2017) matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatın hipotez ve hükmünü yazmak için farklı beceriler sergilediğini belirlemiştir. Çalışmaya katılan Sınıf öğretmenliği öğrencileri ispatların gerekçelendirmesini desteklemek için analojik akıl yürütmelerden yararlanmışlardır. Öztürk'te (2017) matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapma sürecinde analojik akıl yürütmelerden yararlandıklarını tespit etmiştir. Katılımcı Sınıf öğretmenliği öğrencilerinden birinin ispatı tekrar yaparak sonucu kontrol ettiği belirlenmiştir. Alan yazındaki pek çok çalışmada öğrencilerin bir problemi çözdükten sonra veya ispatı yaptıktan sonra en başa dönüp işlemleri tekrar yaparak sonucu kontrol ettiği tespit edilmiştir (Kaplan ve Duran, 2015; Nool, 2012; Öztürk, 2017). Bu bağlamda ulaşılan sonucun alan yazını desteklediği söylenebilir.

Çalışmaya katılan sınıf öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapma sürecindeki argümanlarından sınırlılıkları çürütme yolları kategorisinde önermede verilen hükme ulaştığı için olası alternatifleri çürüttüğünü düşünme, tüm ispat süresince işlemleri kontrol etme ve yaptığı işlemlerin gerekçelerini açıklama kodlarına ulaşılmıştır. Katılımcılardan bazıları önermede verilen hükme ulaştığı için olası alternatifleri çürüttüğünü düşündüklerini belirtmişlerdir. Çalışmada iddialarını desteklemek amacıyla sundukları veriler kategorisinde ulaşılan alternatif üretemediği için iddiasının doğru olduğunu düşündükleri bulgusuyla örtüşmektedir. Çalışmada ulaşılan bir diğer kod tüm ispat sürecinde işlemleri kontrol etmedir. Alan yazında pek çok çalışmada ispat yapma sürecinde tüm işlemlerin kontrol edildiği belirlenmiştir (Kaplan ve Duran, 2015; Öztürk, 2017). Bu bağlamda çalışmada ulaşılan ispat süresince işlemleri kontrol eder kodunun alan yazını desteklediği söylenebilir. Çalışmada ulaşılan bir diğer kod ise yaptığı işlemlerin gerekçelerini açıklar kodudur. Öztürk'te (2017) matematik öğretmenliği öğrencilerinin yaptığı işlemlerin gerekçelerini açıkladıklarını belirlemiştir. Bu bağlamda ulaşılan sonucun alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Bu çalışma belli sınırlılıklar altında yürütülmüştür. Çalışmanın katılımcı sayısı bu sınırlılıkların ilkidir. Çalışma nitel araştırma desenlerinden durum çalışması modeline göre yürütüldüğünden detaylı inceleme yapılması amaçlanmış ve bu nedenle örneklem sınırlı tutulmuştur. Gelecek araştırmacılar daha büyük örneklemlerle karma araştırma yöntemlerini kullanarak ispat sürecini inceleyen çalışmalar yürütebilirler. Çalışmanın bir diğer sınırlılığı ise sadece bilişsel yapı ve argümanların ele alınmış olmasıdır. Günümüzde tıp bilimindeki gelişmeler göz önüne alındığında zihinsel yapıları incelemenin de (fMRI ve PET gibi cihazlarla) mümkün olduğu görülmektedir. Bu bağlamda gelecek araştırmacılar ispat yapma sürecini zihinsel açıdan inceleyebilirler. Çalışmanın bir diğer sınırlılığı ise veri toplama aracındaki soruların sayısıdır. Bu çalışmada sadece kümeler konusundaki ispatlar incelenmiş olup farklı konulardaki önermeler çalışma kapsamının dışında tutulmuştur. Gelecek araştırmacılar daha fazla konu ve daha fazla önerme ile daha geniş çaplı çalışmalar yürütebilirler.

Çalışmada ulaşılan sonuçlar öğrencilerin ispat yapmada güçlük yaşadıklarını ve ispat yaparken sadece ezberledikleri yollarla ispat yaptıklarına işaret etmektedir. Ancak ispatın okul matematiği için önemli olduğu göz önüne alındığında öğretmenlerden daha iyi ispat yapması ve neyi neden yaptığını bilmesi beklenmektedir. Bu bağlamda uygulayıcılara yönelik olarak sınıf öğretmeni yetiştirme programında kapsamında hazırlanmış olan öğretim programlarındaki matematik derslerinin sayısı ve ders saatleri arttırılması önerisinde bulunulabilir. Ayrıca derslerin içeriğinde matematiksel ispatlara yönelik konulara yer verilmesinin gerekliği de anlaşılmaktadır. Bu nedenle uygulayıcılara ders içeriklerini gözden geçirerek ispata yönelik etkinliklere de ders içeriklerinde yer verilmesi önerilebilir.

Kaynakça

Aydemir, H. ve Kubanç, Y. (2014). Investigation of the cognitive behavioral problem solving process. *Turkish Studies , 9*(2), 203-219. https://doi.org/10.7827/TurkishStudies.6555

Aydoğdu-İskenderoğlu, T. (2016). Kanıt ve kanıt şemaları. E. Bingölbali, S. Arslan, ve İ. Ö. Zembat (Ed.) *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 65-84). Ankara: Pegem Akademi.

Dawkins, P. C. and Weber, K. (2016). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 123-142. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9740-5

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(2), 47-71. https://doi.org/10.17984/adyuebd.52880

Demir, E., Öztürk, T. ve Güven, B. (2018). Examining pre-service mathematics teachers' reasoning errors, deficiencies and gaps in the proof process. *European Journal of Science and Mathematics Education, 6*(2), 44-61.

Demircioğlu, H. ve Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının "sözsüz ispatlar" ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(7), 81-99.

Doruk, M. ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(1), 231-240.

Doruk, M. ve Kaplan, A. (2015). Prospective mathematics teachers‟ difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 315-328.

Fischbein, E. (1999). Intuition and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics , 38*(1-3), 11-50. https://doi.org/10.1023/A:1003488222875

Fukawa-Connelly, T. P. (2012). A case study of one instructor‟s lecture-based teaching of proof in abstract algebra: making sense of her pedagogical moves. *Educational Studies in Mathematics , 81*(3), 325–345. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9407-9

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi* (30), 35-45.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics , 15*(3), 42-49.

Hanna, G. and Barbeau, E. (2010). Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge. G. Hanna, H. N. Jahnke ve H. Pulte (Ed.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* içinde (s. 85-100). New York, NY: Springer.

Hanna, G. and De Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 329-336. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0073-4

Hanna, G., Jahnke, H. N. and Pulte, H. (2010). *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives.* New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5

Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. J. Kaput, A. H. Schoenfeld, ve E. D. (Ed.) *Research in collegiate mathematics education III (Cbms Issues in Mathematics Education)* içinde (s. 234-283). Washington: American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbmath/007/07

Kane, M. T. (2013). Validating the interpretations and uses of test scores. *Journal of Educational Measurement, 50*(1), 1-73. https://doi.org/10.1111/jedm.12000

Kaplan, A. ve Duran, M. (2015). Ortaokul öğrencilerinin matematik dersine çalışma sürecinde üstbilişsel farkındalık düzeylerinin karşılaştırılması. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi , 10*(2), 417-445.

Kaplan, A., Doruk, M., Öztürk, M. ve Duran, M. (2016). Matemati ve matematik eğitimi öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşleri arasında fark mıdır? *Journal of Human Sciences , 13*(3), 6020-6037. https://doi.org/10.14687/jhs.v13i3.4327

Komatsu, K. (2016). Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics , 96*(2), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9731-6

Maykut, P. and Morehouse, R. (2005). *Beginning qualitative research: A philosophic and practical guide.* London; Washington, D.C.: The Falmer Press.

Newton, P. E. (2013). Two kinds of arguments? *Journal of Educational Measurement , 50* (1), 105-109. https://doi.org/10.1111/jedm.12004

Nool, N. R. (2012). Exploring the metacognitive processes of prospective mathematics teachers during problem solving. *International Proceedings of Economics Development and Research* (30), 302-306.

Öztürk, M. (2017). *Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin bilişsel açıdan incelenmesi* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Erzurum: Atatürk Üniversitesi.

Öztürk, M. ve Kaplan, A. (2019). Cebirsel ispat yapma sürecinin bilişsel açıdan incelenmesi: Bir karma yöntem araştırması. *Eğitim ve Bilim*, *44*(197), 25-64. https://doi.org/10.15390/EB.2018.7504

Öztürk, M., Akkan, Y. ve Kaplan, A. (2018). Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin kümeler konusundaki sembolik önermeleri ispatlama süreçlerinin bilişsel açıdan incelenmesi. *X. International Congress of Educational Research.* Nevşehir: Eğitim Araştırmaları Birliği.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23-41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x
Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 83-96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0
Reiss, K. and Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktikt der Mathematik*, *34*, 29-35. https://doi.org/10.1007/BF02655690
Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science*, *26* (1-2), 113-125. https://doi.org/10.1023/A:1003044231033
Smith, E. E. and Kosslyn, S. M. (2014). *Bilişsel psikoloji: Zihin ve beyin.* (M. Şahin, Çev.) Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.
Stake, R. E. (2010). *Qualitative research: Studying how thinks works.* New York, NY: Guildford Press.
Tall, D. O. (2004). The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *23*(3), 29-33.
Tall, D. and Mejia-Ramos, J. P. (2010). The long-term cognitive development of reasoning and proof. G. Hanna, H. Niels, ve J. H. Pulte (Ed.) *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* içinde, (s. 137-150). New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_10
Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.
Van-Eemeren, F. H., Grootendorst, R. and Snoeck-Henkemans, F. (2002). *Argumentation: analysis, evaluation, presentatio.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Van Garderen, D. V. (2006). Teaching visual representation for mathematics problem solving. M. M. (Ed.) *Teaching mathematics to middle school students with learning difficulties* içinde (s. 72-88). New York, London: The Guilford Press.
Zazkis, D., Weber, K. and Mejía-Ramos, J. P. (2015). Two proving strategies of highly successful mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 11-27. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.04.003

Summary

Introduction

Students encounter mathematics for the first time in pre-school and elementary school. In preschool mathematics, students usually work on geometric forms, compare objects, and learn how to deal with numbers from 1 to 10. In elementary school, they learn the basic mathematical knowledge required for middle school mathematics. Although all school periods are important for teaching mathematics, primary school period is more important than other periods since more formal knowledge should be learned in primary school years. The literature emphasizes that teachers have a significant effect on the development of mathematical knowledge and attitude of the student in this period. Researches revealed that teachers' mathematical knowledge influences students' perspectives of mathematics. Therefore, it is important that teachers have good mathematics knowledge. The basic mathematics courses have an important for mathematics content knowledge of elementary teachers. Because, in the elementary school student teachers' curriculum, students have two content courses related to mathematics: Basic Mathematics I and Basic Mathematics II. If there are gaps in mathematics learning in these lessons taken by the elementary teachers, the knowledge of the teachers may be lack and this may be reflected on their students. In order not to have any deficiencies in learning, students should be trained in a process-oriented, not result-oriented manner. For this, teachers should have the ability of solving the problem at the basic level although they have good problem-solving skills. The reasons explained above make it necessary to examine how the elementary teachers make the proofs in the lessons they took during the training process. On the other hand, it is seen that there is not enough number of studies examining the proving process of elementary teachers. This study aims to reveal the process of making proof of elementary school student teachers. The results of the study are expected to guide the design of the learning environment in the teacher training process. In addition, the study is also important in terms of revealing the process of making proof of elementary school student teachers.

Method

In the study, the case study model, among qualitative research designs, was used. In this study, 89 elementary school student teachers studying at the 1st grade of Department of Elementary Teacher Education were divided into three groups as high, medium and low success according to the basic mathematics midterm exam grades. Two students (6 students in total) were randomly selected from each group. The data of the study was collected by means of thinking aloud protocol and documents. The thinking aloud protocol includes two activity cards and an interview form. On each activity card, a verbal proposal was presented to the students about sets and they were asked to prove this proposition by sounding. Descriptive analysis method was used in the study. In current study, we used theoretical framework developed by Tall and Mejia-Ramos (2010) in order to examine the cognitive processes in the proving process of the elementary school student teachers. The framework consists of formal expression with the concrete development, symbolization and actions in the development of the mental world of mathematics.

Results

The present study reports the cognitive structures and arguments in the proving process of elementary school student teachers. The study shows that their cognitive structures concretization, symbolization and formal expression. It was found that they used arguments to put forward the claim, to present the data, to render verifiable statements and limitations. The categories obtained for the arguments in the proof-making process: to put forward the claim, support with given data, a qualifier may be used to express the strength with which the claim may be taken and a rebuttal may be used to state the possible limitations.

Conclusions and Discussion

When the cognitive structures of the elementary school student teachers in the process of making proof are considered, the codes of drawing and examples are shown in the concretization category. Many studies in the literature have shown that students or teachers use examples to prove the truth of the proposition (Harel and Sowder, 1998; Öztürk, 2017). One of the cognitive structures in the process of making proof is symbolization. In the symbolization category, it is possible to symbolize by memorization, to write the definitions symbolically, and to learn from symbolic expressions. In the literature, it was determined that students made memorization of proofs in many studies (Dede and Karakuş, 2014; Güven, Çelik and Karataş, 2005; Öztürk and Kaplan, 2019). In this context, it can be said that symbolization in the way that elementary school student teachers memorize it supports the literature. It can be said that other codes in the symbolization category (which can be described as symbolic expressions and symbolic expressions) support the literature. Doruk and Kaplan (2015) found that prospective elementary mathematics teachers were far from using symbolic expressions in the process of making evidence. However, in many studies in the literature, it was determined that the elementary school student teachers wrote symbolic propositions in the process of making proof (Fukawa-Connelly, 2012; Hanna, 1995). In the cognitive structures of primary school teachers, hypothesis and provision writing codes were obtained by systematically proving in the category of formel expression. In the studies conducted in the literature, it was determined that the students showed their hypothesis and provision writing skills by making systematic proof in the process of making proof (Öztürk, 2017; Radford, 2008; Smith & Kosslyn, 2014). In this context, it can be said that codes in the category of formal expression support the literature.

Elementary school student teachers' claims about the accuracy of the proof are classified as true, false and unstable. In many studies in the literature, it was determined that the participants were able to determine if the proposition was correct (Aydemir & Kubanç, 2014; Öztürk, 2017; Schraw, 1998). In order to support the claims of the elementary school student teachers who participated in the study, the codes given to the lecturers who gave the lesson in the category, basing on the examples, basing on the symbolic expressions, basing on the systematic study and thinking that it is true for not producing alternatives can be found. It was determined in the literature that elementary school student teachers exhibited these skills (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016; Dede & Karakuş, 2014; Demircioğlu & Polat, 2016; Doruk & Kaplan, 2015; Harel & Sowder, 1998; Nool, 2012; Öztürk, 2017). The codes of the students who participated in the study were reached through with the codes to verify the hypothesis and judgment of the proofs that confirm the data they provided, to use symbolic writing, to benefit from analogical reasoning and to check the result by repeating the proof. These skills support the field writing (Kaplan and Duran, 2015; Nool, 2012; Öztürk, 2017). Elementary school student teachers participated in the study of the arguments of the process of deficiencies in the category of refutation ways reached the provision in the proposed alternative to thinking of possible alternatives to refute, during the entire proof of the process to explain the reasons for the operations and codes were reached. These findings support the literature (Kaplan and Duran, 2015; Öztürk, 2017).

This study was carried out under certain limitations. One of these limitations is that only cognitive structure and arguments are discussed in the study. Today, considering the developments in medical science, it is possible to examine mental structures (devices such as fMRI and PET). In this context, future researchers can examine the process of making evidence from a mental perspective. Another limitation of the study is the number of questions in the data collection tool. In this study, only proofs about clusters were examined and the propositions on different subjects were excluded from the study. Future researchers can carry out broader studies with more topics and more proposition.

Authors' Biodata / Yazar Bilgileri

Mesut ÖZTÜRK Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde doktor öğretim üyesi olarak görev yapmaktadır.

Mesut Öztürk is an assistant professor at Bayburt University, Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education.

Yaşar AKKAN Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik mühendisliği bölümünde doçent doktor olarak görev yapmaktadır.

Yaşar Akkan is an associate professor at Gümüşhane University, Faculty of Engineering and Natural Science, Department of Mathematical Engineering.

Abdullah KAPLAN Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde profesör doktor olarak görev yapmaktadır.

Abdullah Kaplan is an professor at Atatürk University, Kazım Karabekir Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education.