Cumhuriyet International Journal of Education, 13(1): 102-119, 2024
DOI: https://dx.doi.org/10.30703/cije.1302410

Cumhuriyet International Journal of Education

| cije.cumhuriyet.edu.tr | Founded: 2011 Available online, ISSN: 2147-1606 Publisher: Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Examination of Mathematics Teacher Candidates' Arguments and Proof Schemes in the Process of Collective Argumentation

Buse Gizem Yitmez[1,a,*], **Süha Yılmaz**[2,b]

[1]*Institute of Educational Sciences, Dokuz Eylul University, Izmir, Türkiye*
[2]*Buca Faculty of Education, Dokuz Eylul University, Izmir, Türkiye*
**Corresponding author*

Research Article

History
Received: 25/05/2023
Accepted: 31/10/2023

This paper was checked for plagiarism using iThenticate during the preview process and before publication.

ABSTRACT

The study, aims to examine the arguments and proof schemes created by the mathematics teacher candidates in the process of collective argumentation and to interpret the arguments in question by taking into account the proof schemes. The participants of this research, which is designed as one group case study, are four mathematics-teaching undergraduate students. The data collection tools of this research are the video recordings, observation notes, and the students' solution papers. Data analysis was carried out in two stages in this study. Firstly, the video recordings were transcribed and the data obtained were analyzed using Toulmin's argumentation schema, and then the proof schemes used in this process were determined. The results of the research show that four different sub-arguments emerged in the argumentation process in which teacher candidates actively participated. It is especially noteworthy that the teacher candidates presented rebuttals against each other's explanations and some of them were refuted by others. In addition, it was determined that external and experimental proof schemes were used in the sub-arguments formed in the argumentation process, but all of these sub-arguments were refuted. The data of the study show that analytical proof schemes were predominantly used in the main claim on which the teacher candidates reached a consensus. This study is limited to one group and one proof question, and it is recommended to conduct more in-depth research in the future.

Keywords: Argumentation, proof schemes, mathematics, teacher candidates, case study

Matematik Öğretmeni Adaylarının Ortaklaşa Argümantasyon Sürecindeki Argümanlarının ve İspat Şemalarının İncelenmesi

Bilgi
**Sorumlu yazar*

Süreç
Geliş: 25/05/2023
Kabul: 31/10/2023

Bu çalışma ön inceleme sürecinde ve yayımlanmadan önce iThenticate yazılımı ile taranmıştır.

ÖZ

Bu araştırmada, matematik öğretmeni adaylarının ortaklaşa argümantasyon sürecinde oluşturdukları argümanların ve ispat şemalarının incelenmesi ve söz konusu argümanların ispat şemaları dikkate alınarak yorumlanması amaçlanmaktadır. Tekli durum çalışması olarak desenlenen araştırmanın katılımcılarını dört matematik öğretmenliği lisans öğrencisi oluşturmaktadır. Araştırmanın veri toplama araçlarını ortaklaşa argümantasyon sürecinin video kayıtları, araştırmacının gözlem notları ve öğretmen adaylarının çözüm kağıtları oluşturmakta olup veri analizi iki aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk olarak video kayıtlar transkript edilerek elde edilen veriler Toulmin'in argümantasyon şeması kullanılarak analiz edilmiş, daha sonra bu süreçte kullanılan ispat şemaları belirlenmiştir. Araştırma sonuçları öğretmen adaylarının aktif olarak katıldıkları argümantasyon sürecinde dört farklı alt argümanın ortaya çıktığını göstermektedir. Argümantasyon sürecinde veri, iddia, gerekçe, çürütücü ve destekleyici bileşenleri ortaya çıkarken, niteleyici bileşeninin kullanılmadığı görülmüştür. Özellikle öğretmen adaylarının birbirlerinin açıklamalarına karşılık çürütücüler sunmaları ve bunlardan bazılarının diğerleri tarafından çürütülmesi dikkat çekmektedir. Ayrıca argümantasyon sürecinde oluşan alt argümanlarda dışsal ve deneysel ispat şemalarının kullanıldığı, ancak bu alt argümanların tamamının çürütüldüğü belirlenmiştir. Araştırmanın verileri öğretmen adaylarının üzerinde fikir birliği sağladıkları ana iddiada ağırlıklı olarak analitik ispat şemalarının kullanıldığını göstermektedir. Bu araştırma tek grup ve bir ispat sorusu ile sınırlı olup gelecekte daha geniş katılımcı grupları ve farklı ispat soruları ile daha derinlemesine araştırmalar yapılması önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Argümantasyon, ispat şemaları, matematik, öğretmen adayları, durum çalışması

[a] *gizem.yitmez@gmail.com* *https://orcid.org/0000-0002-4163-489X* | [b] *suha.yilmaz@deu.edu.tr* *https://orcid.org/0000-0002-8330-9403*

How to Cite: Yitmez, B. G., & Yılmaz, S. (2024). Matematik öğretmeni adaylarının ortaklaşa argümantasyon sürecindeki argümanlarının ve ispat şemalarının incelenmesi. *Cumhuriyet International Journal of Education, 13*(1): 102-119.

Giriş

Matematiğin temel yapılarından biri olan ispat, matematikte önemli bir yere sahiptir (Tall, 1995). İspatlar, bir teorem ya da iddianın anlamını meydana çıkararak matematiği anlamaya yardımcı olmaktadır. Çünkü ispatlar kavramları ilişkilendirme, tahminler yapma, ifadeleri doğrulama ve yeni bilgileri genellemeyi içermektedir (Schabel, 2005). Baki'ye (2006) göre matematiksel ispatların amacı iddiaların doğruluğunu ya da yanlışlığını ortaya çıkarmaktır. Harel ve Sowder (2007) ise ispatı bireyin matematiksel durumun doğruluğuna önce kendisini daha sonra başkalarını ikna etme süreci olarak tanımlamıştır. Ancak öğrencilerden matematiksel bir ispat yapmaları istendiğinde konu ile ilgili ispata yönelik bilgileri veya ön bilgileri aynı olmadığından ispat yaparken kullandıkları yollar da matematiksel duruma, kişiye, topluluğa göre farklılaşmaktadır. Harel ve Sowder (1998) bu farklı yolları sınıflandırırken bir kişinin veya topluluğun kullandığı ispatları açıklamak için ispat şeması kavramını tanımlamıştır.

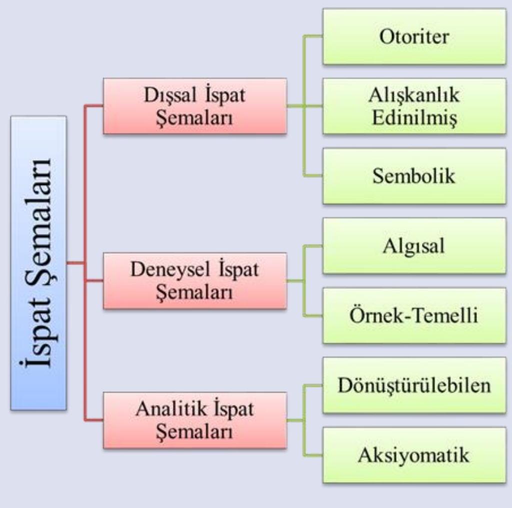
İspat şemaları, bir bireyin veya topluluğun matematiksel bir durumun doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek için kullandığı ispatların bir sınıflaması olmasının yanı sıra bir düşünme biçimi olarak tanımlanmaktadır (Harel & Sowder, 1998). İspat şemaları ile ilgili bir sınıflandırma yapılırken durumun doğruluğuna ya da yanlışlığına bakılmaksızın bireylerin durum karşısındaki düşünce yapılarının ortaya çıkarılması amaçlanmaktadır. Bu nedenle ispat şemaları bir bireye veya topluluğa özgü kanıt olarak tanımlanmasının yanı sıra bireylerin iddia ettikleri durumdan nasıl emin olduklarını ve başkalarını nasıl ikna ettiğini ortaya koymaktadır (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2019). Bu çalışmada literatürde yer alan çalışmalardan farklı olarak katılımcıların ispat şemaları argümantasyona dayalı bir bakış açısıyla ele alınmaktadır. Argümantasyon, bir kişinin bir iddianın geçerliliğine karşısındaki topluluğu ikna etme süreci olarak tanımlanmaktadır (Krummheuer, 1995) ve bu ikna etme süreci ispatlama sırasında işe koşularak öğrencilerin ispat şemalarına yansımaktadır (Harel & Sowder, 1998). Pedemonte'ye (2001) göre ispat süreci özel bir argümantasyon sürecidir. Bu nedenle bir ispatın ve çözümün gerçekleştirilmesi sırasında veya sonrasında çözümün gerekçesinin kasti olarak açıklanmasıyla, gözlemlenen sınıftaki etkileşimler olarak tanımlanan argümantasyon (Krummheuer, 1995), ispat şemaları ile ilgili olabilir ve öğrencilerin ispat şemaları argümantasyon süreçlerinde tetikleyici olabilir.

Boero ve arkadaşları (2010) ispat ve argümantasyon süreçleri arasındaki ilişkinin matematik eğitiminde önemli bir konu olduğunu vurgulamaktadır. Bunun yanı sıra Pedemonte (2007a; 2007b; 2008) argümantasyon ve ispatın hem yapısal hem de süreç olarak ilişki içerisinde olduğunu belirtmektedir. Bu sebeple argümantasyonda kullanılan bazı ifadeler, çizimler ya da teoremler ispatlama sürecinde de kullanılmaktadır (Pedemonte, 2007a). Doruk'un (2016) ilköğretim matematik öğretmeni adayları, Urhan ve Bülbül'ün (2016) lise öğrencileri ile gerçekleştirdiği çalışmasında, öğrencilerin argümantasyon ve ispat süreçleri ortaya koyulmuştur. Bu çalışmalarda öğrencilerin argümantasyon sürecinde ispat yapısına ve sürecine değinilmiş fakat ispat şemalarına yer verilmemiştir. Öğrencilerin kendilerini ve karşısındakilerini ikna etmek için etkileşim içerisinde gerçekleşen ispatlama sürecinde, ispat şemalarının ve bu süreçte oluşturulan argümanların neler olduğunun incelenmesi ile bu iki süreç arasındaki ilişkinin ortaya çıkarılmasının önemli olduğu düşünülmektedir. Literatür incelendiğinde matematiksel bir ispatın ortaklaşa olarak gerçekleştirildiği bir ortamda öğrencilerin ispat şemalarının ve argümanlarının incelendiği bir çalışmaya rastlanmamıştır. Buradan hareketle bu araştırmada matematik öğretmeni adaylarının ortaklaşa argümantasyon sürecinde oluşturdukları argümanlarının ve ispat şemalarının incelenmesi ve söz konusu argümanların ispat şemaları dikkate alınarak yorumlanması amaçlanmaktadır. Araştırma sonuçlarının bu konuda yapılacak çalışmalara ve literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Teorik Altyapı

İspat Şemaları

Harel ve Sowder (1998) ispatı öğrencilerin bilişsel süreçlerini ele alan ve toplumsal kuramlarla şekil alan bir süreç olarak informel açıdan tanımlamışlardır. Bu bakış açısı ispatın doğruluğu ya da yanlışlığıyla ilgilenmeksizin öğrencilerin ne düşündüklerine odaklanmalarını sağlamış ve ispat şeması terimini ortaya atmışlardır. İspat şemaları, bir bireyin kendisini ya da başkasını matematiksel bir durumun doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna etmek için açıklamalarını, savunmalarını ve ispatları içeren düşünme biçimidir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2019). Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin matematiksel durumlara yönelik çözümlerini savunurken kullandıkları şemaları dışsal, deneysel ve analitik ispat şemaları olarak üç ana grupta sınıflandırmışlardır (Resim 1).



Resim 1. Harel ve Sowder'ın ispat şeması sınıflandırması (1998)

Dışsal ispat şemasını kullanan öğrenciler kendini veya bir başkasını dışsal kaynakları kullanarak ikna ederler ve bu kaynaklar çoğunlukla öğretmen, kitap ya da aile gibi dış öğelerden oluşmaktadır (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2019). Eğer öğrenciler matematiksel bir durumun doğruluğunu yalnızca kitaplara, öğretmenlerinin söylediklerine, ailesinden ya da arkadaşlarından duyduklarına dayandırıyorsa *otoriter ispat şeması*; görüntüsüne yani akıl yürütmektense önceden öğrendiği delilleri veya gerekçeleri öne sürüyorlarsa *alışagelmiş ispat şeması*; öğrenciler sembolleri anlamlandırmadan veya durum içerisindeki niceliklerle ilişkilendirmeden kullanılıyorsa *sembolik ispat şemasını* ortaya koyan özellikler göstermiş olurlar (Harel & Sowder, 1998).

Deneysel ispat şemasında öğrenciler matematiksel bir durumun doğruluğunu veya yanlışlığını fiziksel gerçeklere veya duyuşsal deneyimlere dayanarak gösterirler (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2019). Deneysel ispat şemaları algısal veya örnek-temelli olabilmektedir. Algısal ispat şemasında öğrenciler bir durumun doğruluğunu sezgilerini temel alarak genellikle çizimler yaparak gösterirler. Örnek-temelli ispat şemasında ise öğrenciler bir durumun doğruluğunu örnek vererek göstermeye çalışırlar (Harel & Sowder, 1998).

Analitik ispat şemasına yönelik özellikler sergileyen öğrenciler varsayımlarının doğruluğunu mantıksal çıkarım yoluyla gösteriler. Bu ispat şemasında öğrenciler matematiksel bir durumun doğruluğunu örneklere, sezgilerine ya da dışsal faktörlere dayandırmaktan ziyade aksiyomları, teoremleri kullanarak akıl yürütürler ve matematiksel ilişkileri kullanırlar (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2019). Analitik ispat şemaları dönüştürülebilen veya aksiyomatik olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Dönüştürülebilen ispat şemasında öğrenci kendini veya bir başkasını ikna etmek için akıl yürütmeler yoluyla genelleme yoluna gitmektedir (Harel & Sowder, 1998). Aksiyomatik ispat şeması ise dönüştürülebilen ispat şemasını kapsamakta olup ek olarak tanımsız terimleri, sonuçları, tahminleri aksiyomları ve neden-sonuç ilişkilerini içermekte olup öğrenciler tanımlanmamış aksiyomları ve terimleri içeren bir ispatı anlayarak böyle bir sistemde rahat biçimde çalışabilirler (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2019).

İspatlama sürecinde öğrenciler ispat şemalarını kullanmaktadırlar. Bu şemalar aracılığıyla öğrencilerin anlama düzeylerini ve ikna oldukları ispat teknikleri belirlenebilmektedir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2019). Ayrıca bu şemada yer alan üç ana kategori birbirinden bağımsız olmamakla birlikte öğrenciler kısa zaman içerisinde birden fazla ispat şemasına ilişkin özellikler sergileyebilirler (Harel & Sowder, 1998). İspat şemaları çerçevesi ile bir ispatın doğruluğuna ya da yanlışlığına bakılmaksızın öğrencilerin düşünce yapılarını incelemek mümkündür. Buradan hareketle bu araştırmada matematik öğretmeni adaylarının matematiksel bir ispata yönelik kullandıkları şemaları incelemek için Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şeması çerçevesi kullanılmıştır.

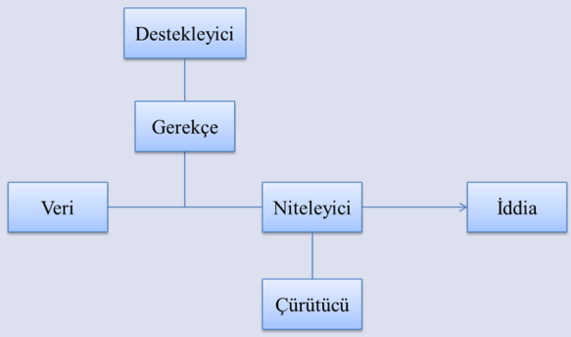
Ortaklaşa Argümantasyon

Son yıllarda matematik eğitiminde bireysel öğrenmeden ziyade, sosyal bağlamlarda öğrenmeye doğru geçiş söz konusudur. Temeli Vygotsky'nin (1978) çalışmalarına dayanan sosyal öğrenme yaklaşımları öğrenme ve öğretme sürecinde birey ve toplum arasındaki etkileşimi farklı açılardan incelemektedir. Sosyal yaklaşımların odak noktası, öğrencilerin gruplar halinde üzerinde çalıştığı problemlere çözümler getirmektir (Brown & Renshaw, 2000). Bu çözümler sırasında öğrenciler matematiksel olarak iletişim kurmakta ve sınıf içi tartışmalar gerçekleşmektedir (Brown, 2017). Matematik eğitiminde sınıfta etkileşim içerisinde gerçekleşen bu tartışmalar ortaklaşa argümantasyon sürecine işaret etmektedir (Conner vd., 2014a).

Argümantasyon, Toulmin'in (1958/2003) Argümanların Kullanımları (The Uses of Arguments) kitabı ile gündeme gelmiş ve hukuk, sağlık, mühendislik, eğitim gibi birçok alanda kullanılmaya başlanmıştır. Krummheuer (1995) matematik eğitiminin, sosyal ve iletişimsel yönünü vurgulamış ve argümantasyon kavramını matematik eğitimine uyarlamıştır. Krummheuer (1995), Toulmin'den farklı olarak bir kişinin başkalarını ikna etmesi yerine birden fazla kişinin etkileşimi ile genellikle fikir birliği ile ortak bir sonuca varılması olarak ele almış ve ortaklaşa argümantasyon ifadesini kullanmıştır. En genel anlamda ortaklaşa argümantasyon öğrencilerin veya öğretmenlerin matematiksel bir iddiada bulunduğu, bunu desteklemek için kanıtlar sağladığı bir süreç olarak tanımlanmaktadır (Conner vd., 2014a). Bu süreç sonucunda oluşan ürün olarak ele alınan argüman kavramı ise bir tahmini veya sonucu desteklemek veya çürütmek için ortaya koyulan teorilerin ya da kanıtların bir arada kullanılması olarak tanımlamaktadır (Toulmin, 1958/2003).

Krummheuer (1995) argümantasyon modelini matematik eğitimine uyarlarken, argümanların bir çerçeveye bağımlı olduğunu belirtmiş ve bu çerçevenin yalnızca matematiksel ilkelere değil sınıfın sosyal bağlamına dayalı olan ortaklaşa argümantasyon sürecini açıklamak için de kullanılabileceğini ifade etmiştir (Tekin-Dede, 2019). Buradan hareketle Krummheuer (1995), Toulmin'in argümantasyon şemasını (TAŞ) (1958/2003) matematik eğitimine uyarlayarak, öğrencilerin oluşturduğu argümanları incelemek için Resim 2'de yer alan TAŞ'ı açıklamıştır

Bu şema altı bileşenden oluşmakta ve ana bileşenlerini; üzerinde tartışılan ifade olan iddia (claim), iddiayı destekleyen veriler (data) ve veriyi desteleyen gerekçeler (warrant) oluşturmaktadır (Conner, 2008).



Resim 2. Toulmin'in argümantasyon şeması (1958/2003)

Argümantasyon şemasının yardımcı bileşenlerini ise iddianın kesinlik derecesini ifade eden niteleyiciler (qualiefier), genellikle üstü kapalı olan ve gerekçeyi desteklemek için kullanılan destekleyiciler (backing) ve oluşturulan argümanın geçerli olmayacağı durumları belirten çürütücüler (rebutal) oluşturmaktadır (Conner, 2008). Krummheuer, bir argümanın özünün, argümantasyon sürecine katılanlar tarafından etkileşimli olarak oluşturulduğunu ve destek bileşeninin genellikle üstü kapalı olduğunu ve dolayısıyla bir gözlemci tarafından erişilebilir olmadığını belirterek öğrencilerin argümanlarını incelemek için şemanın ana bileşenlerinin yeterli olduğunu belirtmektedir (Conner, 2008). Diğer yandan Inglis vd., (2007) yardımcı bileşenlerin matematiksel argümantasyon için önemli olduğunu ve bu nedenle ortaklaşa argümantasyon analizlerine dahil edilmesi gerektiğini savunmaktadır.

Krummheuer, Toulmin'in modelini matematik sınıflarında ortaklaşa argümantasyona uyarlaması, öğrencilerin öğrenmesini incelemek ve öğretmenin ana hedeflerinden biri olan tartışmayı desteklemek olduğu sınıflarda öğretmenin rollerini ve etkinliklerini tanımlamak için başarıyla kullanılmaktadır (Conner, 2008). Elbette bir argümanın yapısı, bu bileşenlerle ifade edilenden daha karmaşık olabilmektedir. Bu durumda alt argüman kavramı ortaya çıkmış ve Toulmin argümanların, alt argümanlara dayandığını belirtmiştir. Ancak bununla ilgili ayrıntılı bilgi vermemiştir (Conner vd., 2014a). Çoklu alt argümanlardan oluşan bir argümantasyon şeması, Şekil 1'de yer alan bir dizi şemayı bir araya getirerek ve bunları bir zincir gibi bağlayarak elde edilir (Tekin-Dede, 2019). Bu şekilde bir şemada örneğin birinci alt argümandaki iddialar ikinci alt argümanda veri konumunda olacaktır. Buradan hareketle bu araştırmada matematik öğretmeni adaylarının ortaklaşa argümantasyon sürecini açıklamak için TAŞ bileşenleri kullanılmıştır.

Yöntem

Araştırmanın Modeli

Bu araştırma nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması üzerine temellendirilmiştir. Durum çalışması bir olay veya olgunun derinlemesine incelenmesi ve betimlenmesi olarak tanımlanmaktadır (Merriam, 2018). Bu araştırmada veriler dört ilköğretim matematik öğretmen adayından oluşan tek grup tarafından bir ispatın çözümünü içeren bir durumdan toplanmıştır. Tek grupla çalışılmasının nedeni öğretmen adaylarının ispatı çözerken oluşturduğu argümanlarnı ve ispat şemalarının derinlemesine incelemesidir. Dolayısıyla bu çalışmanın deseni tek gruplu durum çalışması olarak belirlenmiştir.

Çalışma Grubu

Bu araştırma, bir grup 3. sınıf matematik öğretmeni adayının ortaklaşa argümantasyon sürecinde bir ispatın çözümünde oluşturduğu argümanların ve ispat şemalarının incelenmesini içermektedir. Çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme ile belirlenmiştir. Öğretmen adaylarına analiz alanındaki temel bir ispat sorulacak olması nedeniyle katılımcıların analiz I, analiz II ve analiz III derslerini almış olmaları gerekmektedir. Dolayısıyla çalışma grubu üç yıl boyunca fakülte tarafından okutulan dersler bağlamında ispat konusunda bilgi birikime sahip olmaları sebebiyle 3. sınıf olarak belirlenmiştir. Bunun yanı sıra öğrencileri tanıyan ve iletişim halinde olan bir öğretim üyesinden fikir alınarak kendini ifade edebilen, birbirleri ve grup normları hakkında bilgi sahibi olan, grup tartışmalarına aktif olarak katılma ve en iyi sonucu elde etmek için birbirlerinin iddialarını destekleme veya çürütme yeteneğine sahip oldukları düşünülen dört öğretmen adayı seçilmiştir. Bu bağlamda araştırmanın çalışma grubunu gönüllülük ve belirlenen ölçütler esas alınarak seçilen dört matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır.

Öğretmen adaylarına argümantasyon hakkında özel bir eğitim verilmemiştir. Benzer şekilde fakülte tarafından okutulan dersler bağlamında da bu konuda eğitim almamışlardır. Fakat daha önce aldıkları bazı dersler kapsamında grup çalışması yapmış olup böylece birlikte çalışmak, karar almak, grup üyelerinin fikirlerine saygı duymak, uygun fikirleri belirleyerek gereksiz olanları elemek gibi grup çalışması için gerekli olan deneyimlere sahiplerdir. Ayrıca üç yıldır aynı sınıfı paylaşmaları sebebiyle birbirleri hakkında da yeterli bilgiye sahiptirler. Dolayısıyla grup çalışması ve birbirleri hakkındaki bilgi ve deneyimleri sayesinde, öğretmen adaylarının bu deneyimleri söylemlerine yansıttıkları düşünülmektedir.

Veri Toplama Araçları

Bu araştırmanın verileri bir teoremin çözüm sürecini içeren video kayıtları, araştırmacı notları ve öğretmen adaylarının çalışma kağıtları ile toplanmıştır. Ortaklaşa argümantasyon sürecinde amaç öğrencilerin gerçekleştirdiği ispata yönelik argümanlarını ve ispat şemalarını ortaya çıkarmak olduğundan bu araştırma için tek bir teorem yeterli görülmüştür. Bu araştırmada türevin geometrik yorumunu içeren "y=f(x) eğrisi üzerindeki $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin eğimi o noktadaki türevine eşittir" teoremi ispatlanmak üzere katılımcılara yöneltilmiştir. Bingölbali (2015) öğrencilerin türevin geometrik yorumunu kendilerine göre yorumladıklarını ve neticede yanlış kavramsallaştırdıklarını belirtmektedir. Bu bilgiden hareketle öğrencilerin bu teoremi ispatlamak için farklı ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler gösterecekleri ve argümantasyona dayalı bir ortam oluşturacağı ön görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin büyük ihtimalle karşılaştığı bir teorem olması, hem matematiksel hem de geometrik bilgilerini kullanmayı gerektirmesi nedeniyle bu teorem seçilmiştir.

Dikdörtgen bir masanın uzun kenarlarına öğretmen adayları, kısa kenarlarına ise araştırmacılar karşılıklı olacak şekilde oturmuştur. Ardından teorem öğretmen adaylarına sunulmuş ve süre sınırı olmaksızın tartışmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının çalışmalarını kaydetmek için masanın iki ucuna iki adet video kamera yerleştirilmiştir. Böylece veri kaybının önüne geçilmesi amaçlanmıştır. Kaydın başında öğretmen adaylarına çalışma hakkında gerekli bilgi verilerek, teorem sunulmuş ve çözüm süreci başlatılmıştır. Araştırmacılar süreç boyunca katılımcılar ile birlikte olmuş ve onların jest, mimik, eylem, hareket, çözüm kağıdı üzerindeki çalışmaları kaydetmek adına kamera konumu belirlemişlerdir. Bunun yanında araştırmacılar öğretmen adaylarının düşüncelerini açığa çıkarmak, anlaşılmayan kısımları netleştirmek ve tıkandıkları yerde onları aktifleştirmek amacıyla sorular sorsa da onlarla minimum etkileşim kurulmuştur. Veri kaybını mümkün olduğunca en aza indirgemek için kayıt esnasında araştırmacılar notlar almıştır. Bu notlarda argümantasyon sürecini aktifleştiren anlar ve video kamera ile kaydedilemeyecek ancak sözsüz iletişimin bir parçası olan, bireylerin o anki durumu hakkında önemli bilgiler sunan jest, mimik vb. not alınmıştır. Toplamda 40 dakika sonunda öğretmen adayları ispatı tamamlamışlar ve ortak karara ulaşarak ispatı tamamladıklarını belirtmişlerdir.

Veri Analizi

Bu araştırmada matematik öğretmeni adaylarının ortaklaşa olarak bir teoremin çözüm süreci içerisindeki hem argümanlarının hem de ispat şemalarının incelenmesi amaçlandığından veri analizi iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Veri analizinin birincil noktasını TAŞ (1958/2003) temel alınarak Krummheuer (1995) ve Conner (2008) perspektifleri oluşturmaktadır. Bu bağlamda Conner vd.'nin (2014a) belirttiği gibi ilk olarak video kaydı baştan sona izlenerek argümantasyon anları belirlenmiştir. Bu anlar araştırmacının uygulama sırasında tuttuğu notlar ile karşılaştırılarak teyit edilmiştir. Nitel araştırmalarda veri toplama ve analizi eş zamanlı olarak gerçekleştirilmektedir (Merriam, 2018). Dolayısıyla araştırmada veriler toplanırken analiz gerçekleştirilmeye başlanmıştır. Katılımcılara takma isim verilerek söz konusu argümantasyon anları transkript edilmiştir. Toplamda 10 sayfa transkript metni oluşturulduktan sonra Çizelge 1'de yer alan Tekin-Dede (2019) çalışmasında belirttiği TAŞ'daki her bir bileşenin varlığını gösteren göstergelere dair ifadeler aranarak analize başlanmıştır. Bu göstergelere ek olarak katılımcı ifadelerinden ortaya çıkan durumlar incelenmiş ancak farklı bir göstergeye rastlanmamıştır.

Transkript metninin analizine başlarken katılımcıların ifadeleri alt argüman bölümlerine ayrılmıştır. Burada alt argümandan kasıt bir argümanın bir iddiadan diğerine inşa edilmesiyle bir iddianın ön hazırlığı olduğu durumlarda ortaya çıkan ek argümanlardır (Conner vd., 2014a). Bu şekilde öncelikle her bir alt argümanın iddiaları belirlenmiş, daha sonra bu iddiaların başka bir alt argümanda herhangi bir TAŞ bileşeni olarak kullanılıp kullanılmadığı araştırmacılar tarafından tespit edilmiştir. Toplam dört alt argüman şeması oluşturulmuş ve bu alt argümanlar, argümantasyon sürecinin bütün olarak gösterimi için birleştirilmiştir. Argümantasyon şemaları öğretmen adaylarının ortaklaşa argümantasyon süreçleri Conner'in (2008) analiz çerçevesi kullanılarak oluşturulmuştur. Bu sayede araştırmacı ve öğretmen adayları tarafından katkıda bulunulan bölümler ayrı ayrı renklendirilmiş ve daha anlaşılır olması sağlanmıştır. Argümantasyon şemalarında öğretmen adaylarının söylemleri mavi ve araştırmacı söylemleri kırmızı renk ile çerçevelenmiş kutularla gösterilmiştir. Kutuların rengi söz konusu bileşeni kimin ifade ettiğini göstermektedir. Knipping ve Reid (2014) süreci bütüncül olarak temsil etmek amacıyla çürütücülerin ve çürütülen argümanların dahil edilmesinin önemli olduğunu belirtmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının argümanları analiz edilirken ispatın doğruluğuna bakılmaksızın argümantasyon süreçlerine odaklanılmış ve TAŞ'ın tüm bileşenleri ele alınarak analiz gerçekleştirilmiştir. Veriler analiz edildikten sonra argümantasyon çalışmaları yapan bir uzmana argümantasyon şemaları gösterilmiş ve transkript metinlerle birlikte oluşturulan şemalar gözden geçirilerek analizin doğruluğu teyit edilmiştir.

İlk analiz tamamlandıktan sonra transkript metni ve çözüm kağıdı tekrar incelenerek katılımcıların ispat şemaları belirlenmek üzere analize tabi tutulmuştur. Öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde sahip oldukları şemaları Çizelge 2'deki Aydoğdu-İskenderoğlu (2016) tarafından Lee'den (1999) uyarlanarak sınıflandırılan göstergeler kullanılarak analize başlanmıştır. Harel ve Sowder (1998) ispat şemaları aracılığıyla ispatın doğruluğu ya da yanlışlığıyla ilgilenmeksizin öğrencilerin ne düşündüklerine odaklanılması gerektiğine vurgu yapmaktadır. Benzer şekilde öğretmen adaylarının argümantasyon süreçleri incelenirken de aynı yaklaşım benimsenmiştir. Dolayısıyla ispatın doğruluğu gibi nitelikler bu araştırmanın amacı dışında kaldığı için çözümdeki yaklaşımların matematiksel olarak doğru ya da yeterli olup olmadığı tartışılmamıştır. Öğretmen adaylarının ispat şemaları belirlendikten sonra bu konuda çalışmalar gerçekleştiren bir uzman analiz sürecini değerlendirmiştir. Uzman görüşü doğrultusunda öğretmen adaylarının süreç içerisinde kullandığı ispat şemalarına ilişkin fikir ayrılığı yaşanmamış olup, birtakım biçimsel düzeltmeler yapılmıştır.

Çizelge 1. TAŞ Bileşenleri Göstergeleri (Tekin-Dede, 2019)

TAŞ Bileşenleri	Göstergeleri
İddia	Belirli bir soruya verilen cevap Bir tartışmanın başlangıç noktası Bir tartışmanın varış noktası
Veri	İddiayı destekleyen durumlar İddianın temelleri İddiaya yönelik kanıt
Gerekçe	Veri ve iddia arasındaki bağlantı Gerçek hayattan ya da alandan gerekçeler Kural, tanım veya analoji Daha gerçekçi bir sonuca ulaşma isteği
Destekleyici	Gerekçenin neden geçerli olduğunu gösteren sebep Gerekçe için ek kanıt
Niteleyici	İddianın kesinliği, güven derecesi Genellikle, yaklaşık, neredeyse gibi tipik niteleyiciler
Çürütücü	Gerekçenin geçerli olmadığı durumlar

Çizelge 2. İspat Şemalarının Göstergeleri (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016)

	İspat Şemaları	Göstergeleri
Dışsal İspat Şemaları	Otoriter İspat Şeması	Teoremleri ezberlemek Formülleri, kuralları uygulamak İspatı öğretmene, arkadaşa, kitaba, ebeveyne vb. dayandırmak
	Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması	Tanıdık ispat süreçlerini kullanmak Diğer ispat süreçlerine benzer süreçleri kullanmak
	Sembolik İspat Şeması	Matematiksel durumları sembolleri kullanarak yazmak İyi bilinen sembolik algoritmaları kullanmak
Deneysel İspat Şemaları	Örnek-Temelli İspat Şeması	Örnekler göstererek diğerlerini ikna etmek Bir ispatı örnekler göstererek oluşturmak
	Algısal İspat Şeması	Akranlarını çizimlerle ikna etmek Bir veya daha fazla çizime odaklanarak sonuçlar çıkarmak
Analitik İspat Şemaları	Dönüştürülebilen İspat Şeması	Temel konuyu belirlemek Akıl yürütmeyle diğerlerini ikna etmek
	Aksiyomatik İspat Şeması	Aksiyomatik bir sistem geliştirmek Bir teoremi aksiyomatik sistemi kullanarak ispatlamak

Çizelge 2'deki göstergelere göre öğretmen adaylarının ispat şemalarına yönelik yapılan analiz sonucunda, çalışmanın bulgularını ortaya koyan ispat şemaları alt argümanları desteklemek için içerik analizi yapılmıştır. İki analiz yapılırken ve bulgular sunulurken, öncelikli amaç öğretmen adaylarının bireysel eylemlerinden ziyade grubun bir bütün olarak düşünce sürecini yansıtmak olmuştur. Dolayısıyla, katılımcıların ifadeleri takma adlarıyla yer alsa da araştırmada katılımcıların eylemlerinin birbirleriyle karşılaştırılması amaçlanmamaktadır.

Bulgular

Araştırmanın bu bölümünde türevin geometrik yorumunu ispatlarken katılımcılar arasındaki tartışmaları içeren ortaklaşa argümantasyon süreci ve kullanılan ispat şemaları açıklanmaktadır. İlk olarak ortaklaşa argümantasyon süreci ele alınarak öğretmen adaylarının oluşturdukları ortaklaşa argümantasyon süreçleri ve ispat şemaları açıklanacak ve son olarak tüm sürecin genel bir şeması sunulacaktır.

Argümantasyon Süreci ve İspat Şemalarına İlişkin Bulgular

Ortaklaşa argümantasyon süreci ilk olarak araştırmacının, ispatlaması beklenen teoremin yazılı olduğu kağıdı öğretmen adaylarına vermesiyle başlamıştır. Öğretmen adaylarından teoremi sesli olarak okumaları istenmiş ve teoremin herkes tarafından anlaşıldığından emin olunmuştur. Teorem anlaşıldıktan sonra öğretmen adayları kağıt üzerine koordinat düzlemi çizmeye karar vermişler ve bu düzlem üzerinde bir eğri (parabol) çizmişlerdir. Bu eğriye f(x) adı vermişler ve üzerinde bir A noktası belirtmişlerdir. Bu noktadan teğet çizmişler ve teğetin x eksenini kestiği açıyı α olarak göstermişlerdir. A noktasının eksenleri kestiği noktayı (x_0, y_0) ve o noktadan geçen teğet üzerinde bir noktayı (x_1, y_1) olarak belirlemişlerdir. Sonrasında teğet doğrusunu d olarak adlandırarak teğetin eğiminin $m_d = \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ olduğunu göstermişlerdir. Öğretmen adaylarının yaptığı çizim Resim 3'te yer almaktadır. Bu eğimin o noktadan geçen türeve eşit olduğunu göstermeleri gerektiğini belirterek tartışmaya başlamışlardır. İlk olarak

Şeyma teoremi önceki derslerden hatırladığını belirtmiş fakat nasıl olduğunu hatırlamadığını söylemiştir.

Şeyma: Ben bu soruyu hatırlıyorum ya.

Araştırmacı: Nereden hatırlıyorsun?

Şeyma: Bir hocamız hangi hocamız hatırlamıyorum direkt böyle verdi bu soruyu. Biz yine kanıtlamaya çalışmıştık ama bulamamıştık.

Nisa: Evet. Ödev mi vermişti aa evet grup ödevi vermişti.

Şeyma ve Nisa'nın bu söylemini diğer iki öğretmen adayı da baş hareketleriyle onaylamış ancak onlar da ispatı hatırlamadıklarını belirtmişlerdir. Öğretmen adayları ilk olarak teoremi ispatlamak için daha önce öğretmenlerinden öğrendikleri şekilde hatırlamaya çalışmışlar ancak hatırlayamamışlardır. Diğer bir deyişle öğrenciler ispatı geçmişte öğretmenlerinin yaptığı şekilde kanıtlamaya yönelmişler ancak başaramamışlardır. Bu durum öğretmen adaylarının başta dışsal şemalardan otoriter ispat şemasını kullanma eğiliminde olduklarını göstermektedir. Bunun üzerine süreçteki ilk iddia Şeyma'nın $f(x)$ olarak adlandırdıkları eğriyi parabol olarak ele almaları gerektiği iddiası olmuştur. Selin eğrinin ikinci dereceden olduğu belirtilmediği için o şekilde ispat edilemeyeceğini belirterek Şeyma'nın iddiasını çürütmüştür. Söz konusu çürütülen iddiaya ilişkin TAŞ Resim 4'te verilmiştir.

Gamze: Ne yapalım? Şimdi eğimi bulduk tamam. Bunun türeve eşit olduğunu nasıl gösterebiliriz?

Araştırmacı: [Birkaç saniye sessizlik olur].

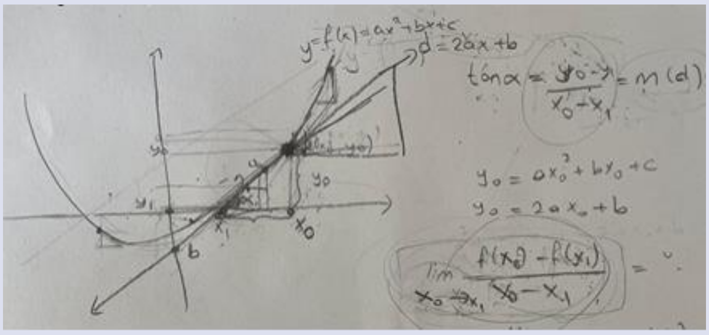
Şeyma: [f(x) olarak adlandırdıkları eğriyi göstererek] ax^2+bx+c yazalım mı?

Gamze: Yazalım

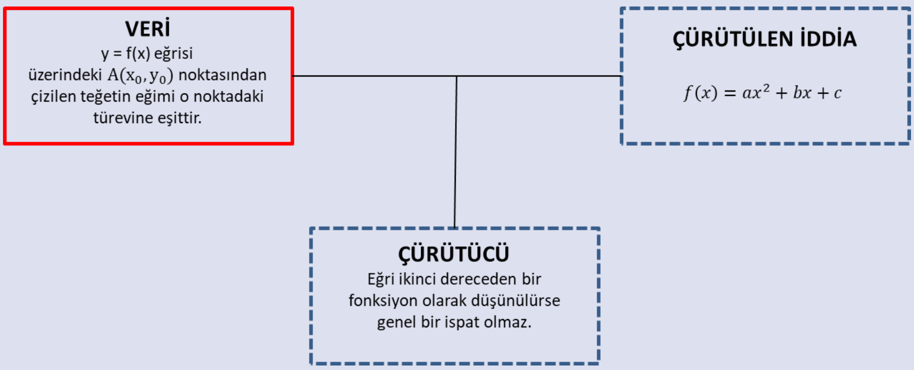
Nisa: Onun [$f(x)=ax^2+bx+c$ gösterir] türeviyle eğimi nasıl eşit olacak?

Selin: Bir şey söyleyeceğim ama bunun ikinci dereceden olduğu fikrini biz verdik. Eğrinin ikinci dereceden olduğunu söylemiyor bize. Genel olarak bir şey yapamayız, genel bir ispata girmez.

Nisa: Doğru



Resim 3. Öğretmen adaylarının sorunun çözümüne yönelik çizimi



Resim 4. Ortaklaşa argümantasyon sürecinin çürütülen ilk iddiasına ilişkin TAŞ

Bu esnada Gamze "şimdilik ikinci derece olarak düşünelim" diye öneri sunmuş ve bu öneri üzerine tartışmaya başlamışlardır. $f(x)=ax^2+bx+c$ parabolünü ele alarak türevinin $f'(x)=2ax+b$ ve eğiminin eşit olduğunu göstermek istemişlerdir. Bunun üzerine $x_1=0$ olarak ele alma, teğetin eğimini hesaplamak için üçgenlerden yararlanma ve y_0'ı yok ederek denklemde yerine koyma gibi farklı öneriler sunmuşlar ancak bu öneriler üzerine tartışma devam etmediği için argümantasyon sürecine dahil edilmemiştir. Burada öğretmen adayları her ne kadar genel bir ispat olmayacağını bilseler de ispatı bir örnek yani parabol üzerinden yapmaya çalışmışlardır. Diğer bir deyişle bir örnek üzerinden genel bir durumun doğruluğunu göstermek için uğraşmışlardır. Bu durum onların deneysel şemalardan örnek-temelli ispat şemasını kullanarak ispat yapma girişiminde bulunduklarını göstermektedir. Bu esnada Selin eğriyi parabol olarak sınırlamak yerine daha genel bir ispat yapabilmek için türevin limit tanımından yola çıkmayı önermiştir.

Selin: Türevin tanımındaki formülden gitsek? Eğimde de var ya mesela y'leri ve x'leri birbirinden çıkartıp bölüyorsun eğimi veriyor. Türevin tanımındaki ilk limitle alakalı formülde de aynısı var.

Araştırmacı: [Öğrenciler hep birlikte onaylarlar].

Nisa: x_1'e mi yaklaşacağız o zaman nereye yaklaşacağız?

Selin: x orada 0'a gitmiyor muydu?

Şeyma: x_0 burada x_1'e yaklaşırken yazabilirsin burada. 0'a yaklaşamam ki 0'a gitmiyor orjinde değil. Limit x_0, x_1'e yaklaşırken bunu buraya [kalemini grafik üzerinde x_0'dan x_1'e doğru kaydırır] yazabilirim.

Selin: Evet, aynen aynen

Nisa: Biz hâlâ ama ikinci dereceden eğri düşünüyoruz şuan.

Selin: Tamam ama Şeyma'nın dediği gibi olunca ikinci dereceden olmasa da olur zaten bu ikisi arasındaki farkı bulacaksın ya.

Araştırmacı: [Öğrenciler türevin limit tanımını yazarlar $\lim\limits_{x_0 \to x_1} \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$].

Gamze: Bu [türevin limit tanımını göstererek] bunu [formüle ettikleri eğim ifadesini göstererek] verdi zaten şuan.

Selin: Onu verdi bitti işte.

Araştırmacı: [Öğrenciler gülüşürler].

…

Araştırmacı: [Gamze, $\lim\limits_{x_0 \to x_1} \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ yazar ve $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ ifadesini göstererek $m_d = \lim\limits_{x_0 \to x_1} \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ yazar].

Burada öğretmen adayları ispatı örneklere dayandırmaktan ziyade akıl yürütmeler aracılığıyla daha genel durumları içeren matematiksel ifadeleri kullanarak diğerlerini ikna etmeye çalışmıştır. Bu durum onların deneysel şemalardan, analitik şemalardan olan dönüştürülebilen ispat şemalarına geçiş yaptıklarını göstermektedir. Oluşturulan $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1} = \lim\limits_{x_0 \to x_1} \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ matematiksel model, ortaklaşa argümantasyon sürecinin ana iddiasını oluşturmaktadır. Öğretmen adayları bundan sonraki kısımlarda bu ana iddia üzerinden tartışmaya devam etmektedirler. Ancak bu modelde eğri üzerinde yer alan $A(x_0, y_0)$ noktasına yaklaşmaları gerekirken onlar teğet üzerinde belirledikleri (x_1, y_1) noktasına yaklaşmışlardır. Araştırmacı o esnada "Siz neden x_0'dan x_1'e gidiyorsunuz? Sizin noktanız $A(x_0, y_0)$ noktası o halde x_1'den x_0'a gitmeniz gerekmez mi?" ifadesiyle oluşturulan iddiaya yönelik çürütücü sunarak yeni bir tartışma başlamıştır. Söz konusu iddiaya ilişkin TAŞ Resim 5'te verilmiştir.

Araştırmacı: Siz neden x_0'dan x_1'e gidiyorsunuz? Sizin noktanız $A(x_0, y_0)$ noktası o halde x_1'den x_0'a gitmeniz gerekmez mi?

Gamze: Hımm o zaman yerlerini mi değiştirmemiz gerekir?

Şeyma ve Selin: Anlamadım.

Gamze: A noktasına yaklaşıyoruz şuanda buraya gelmemiz A'ya gelmemiz lazım şuan da.

[Gamze denklemi x_1'den x_0'a olacak şekilde düzenler]

…

Şeyma: Ben hâlâ neden öyle yaptığımızı anlamadım.

Gamze: A noktasının eğimini bulmak senin hedefin yani A'ya yaklaşmak.

Şeyma: Ama türev alırken her zaman buradan buraya aldık [x_0'dan x_1'e gösteriyor]. Yani lise boyunca buradan buraya aldık ben niye şuan buradan buraya aldığımızı anlayamadım.

Gamze: Ben A hedef olduğu için öyle mantıklı gibi geldi bilmiyorum.

Şeyma: Ben bunun böyle olduğunu kabul etmiyorum. Ben bunun yanlış olduğunu düşünüyorum. x_0'dan x_1e yaklaşıyorum eğime doğru bak böyle gidiyorum yani.

Nisa: Biz ikinci düşündüğümüzde noktaya yaklaşmak olarak düşündük ama eğime mi yaklaşıyoruz?

Şeyma: Eğime gidiyorum ya ben. Bu noktadan [x_0'ı gösterir] gidiyorum işte. Ben niye burdan ters alayım hala mantığıma oturmadı yani.

Gamze: Birazcık açıklarsan ben sana ikna olabilirim gibi.

Araştırmacı: [Öğrenciler gülüşürler].

…

Şeyma: Çünkü kanka noktam bu [x_0'ı gösterir]. Noktadan eğime gidiyorum bak amacım noktaya gitmek değil ki zaten noktadan eğime gidiyorum ben noktadan eğime yazmıştım şuan neyi yazdığımızı bilmiyorum ben.

Selin: Ben ikna oldum Şeyma'ya.

Nisa: Biz sanki şey gibi düşün Gamze mesela orjinden şu noktaya [x_0'ı gösterir] gittiğini düşün buradan buraya gideriz [orjinden x_0'ı gösterir] ama biz noktayı aramıyoruz ki biz eğimi arıyoruz o yüzden noktadan çizilen doğrunun eğimi olduğu için buradan buraya [x_0'dan x_1'e gösterir] gidiyoruz.

Araştırmacı: [Öğrenciler başlarını onaylarcasına sallar].

Şeyma: Hocam bizi yanıltıyorsunuz.

Araştırmacı: [Öğrenciler gülüşürler].

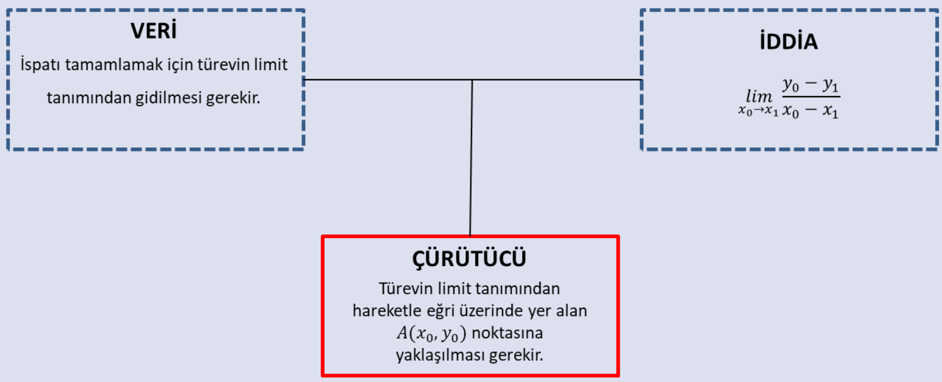
Araştırmacının Resim 5'te yer alan iddiayı çürütmek için sunduğu ifadeyi öğretmen adayları ortak karara vararak çürütürler. Söz konusu çürütülen çürütücüye ilişkin TAŞ Resim 6'da verilmiştir. Şeyma'nın türev alırken amaçlarının eğri üzerinde bir noktaya yaklaşmak değil eğime yaklaşmak olduğu ifadesi artık Resim 5'te yer alan $\lim\limits_{x_0 \to x_1} \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ iddiasının da gerekçesi olmuştur. Ayrıca Resim 5'te yer alan veri ana iddianın gerekçesi hâline gelmiştir. Burada Şeyma önceden öğrendiği tanıdık yapıları kullanarak arkadaşlarını ikna etmeye çalışmaktadır. Diğer bir deyişle öğrenci fikrini savunurken daha önceden öğrendiği ve sorunun çözümünde kullandığı çözüm yoluna dayandırmıştır. Nitekim arkadaşlarını ikna etmeyi başarmıştır. Bu durum onların dışsal şemalardan alışkanlık edinilmiş ispat şemasını kullandığını göstermektedir. Gamze daha demin düzelttiği denklemi tekrardan eski hâline dönüştürmüştür.

Araştırmacı, öğretmen adaylarından yaptıkları ispatı tekrardan açıklamalarını istemiş ve Gamze "Biz başlangıçta grafiğimizi çizdikten sonra normalde eğimimizi bulmuştuk. Eğimi $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ olarak düşündük. Ardından türevin tanımından gelen limite göre dedik ki noktadan eğime yaklaşırız diye karar verdik. Bu karara göre de $\lim_{x_0 \to x_1} \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$ geldi. Buradaki $f(x_0)$ zaten grafik üzerindeki y_0'ımıza denk geliyordu herhangi bir parabol ya da bir eğri üzerinde. Bu da bizi $\lim_{x_0 \to x_1} \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ götürdüğü için baştaki eğim formülümüze denk çıkmış oldu bu şekilde ispat tamamlanmış oldu" şeklinde ifade eder. Burada öğretmen adaylarının düşüncesinde yanlışlıklar olmasının yanı sıra ispat yeterli değildir. Çünkü onlardan zaten bu eşitliğin nasıl sağlandığını göstermeleri beklenmektedir. Bunun üzerine araştırmacı oluşturdukları iddiayı gerekçelendirmelerine yönelik bir tartışma başlatır. Söz konusu gerekçe sunulan iddiaya ilişkin TAŞ Resim 7'de verilmiştir.

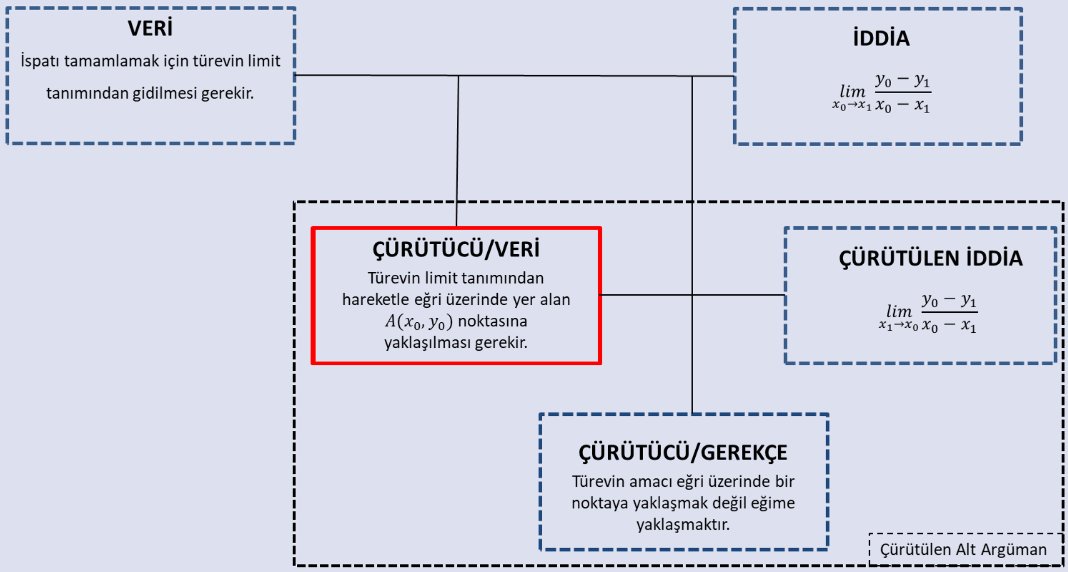
Araştırmacı: Eğimin türeve denk olduğuna nasıl karar verdiniz? Bu [$\lim_{x_0 \to x_1} \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ gösterir] limit durumunda sonuçta, bu limit alındığında eğime eşit olduğunu nereden biliyoruz?
Araştırmacı: [Sessizlik olur].
Gamze: Aslından buradan buraya [x_0'dan x_1'e kalemi kaydırır] kayarken ki doğru üzerinde olduğumuz için buradaki eğimlerin hepsi denk olacağından dolayı x_0'dan x_1'e giderken ki eğimler hep aynı kalır. Yani buradaki tanjantta bulduğumuz değer buradaki [teğet üzerinde kalemi kaydırır] seçebileceğimiz bütün noktalar için de aynı çıkmış olucak. O yüzden denk olduğunu söyleyebiliriz. Bir daha açıklayayım mı?

Gamze oluşturdukları iddianın doğruluğunu akıl yürütmeler aracılığıyla gerekçe sunmaya çalışmıştır. Diğer bir deyişle önceki bilgilerini dönüştürerek söz konusu iddianın doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Dolayısıyla analitik şemalardan dönüştürülebilen ispat şemasının kullandığı söylenebilir. Ancak Gamze'nin sunduğu gerekçe Şeyma'yı ikna etmeye yetmemiş ve Gamze tekrar açıklama yapma gereği duymuştur.

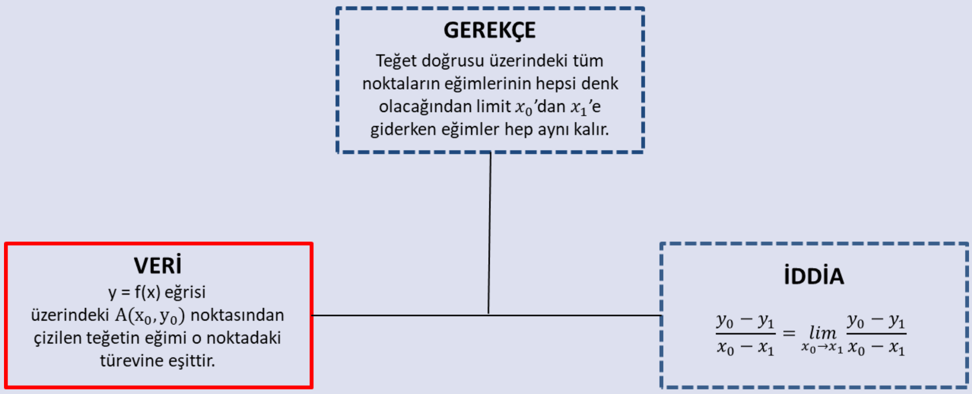
Gamze: Ya çünkü doğru üzerindeyim zaten ben herhangi bir noktaya gidersem gideyim x'e paralel çektiğimde eğimim hiçbir şekilde değişmez. Eğimim değişmeyeceğine göre buradaki değerim hep eşit çıkmak zorunda.
Şeyma: Tamam ama sen zaten diyorsun ki bunun buna [$\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1} = \lim_{x_0 \to x_1} \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ gösterir] eşit olduğunu varsayarak bunu söyledin.
Gamze: Hayır varsayarak değil ben diyorum ki doğru üzerindeysen doğrunun eğimi değişebilir mi?
Şeyma: Değişmez.
Gamze: Ee o zaman teğetin eğimi değişmeyeceğine göre buradaki türev eğime eşit çıkar.
Şeyma: Ben de sana derim ki türevin eğime eşit olduğunu nereden biliyorsun. Bu formülün [türevin limit tanımını gösterir] eğim olduğunu nereden biliyorsun?
Gamze: İşte derim ki bu aradaki fark $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ hangi noktaları belirlersen belirle hangi sayıları seçersen seç fark değişse de sadeleştirildiğinde sürekli bunu vermek zorunda [türevin limit tanımını gösterir] bence diyorum.



Resim 5. Ortaklaşa argümantasyon sürecinin ikinci iddiasına ilişkin TAŞ



Resim 6. Ortaklaşa argümantasyon sürecinin ikinci iddiasının çürütücüsüne ilişkin TAŞ



Resim 7. Ortaklaşa argümantasyon sürecinin ana iddiasına ilişkin TAŞ

Şeyma, $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1} = \lim_{x_0 \to x_1} \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ matematiksel modelinin sağlanması için limitin ortadan kaldırılması gerektiğini savunmuş ve Gamze'nın sunduğu gerekçeye ikna olmamıştır. Bunun üzerine oluşturulan modele dayalı olarak tartışamaya devam etmişlerdir. Bu esnada Nisa limit ortadan kaldırılamıyorsa eşitliğin diğer tarafına limit ekleyelim şeklinde yeni bir iddia ortaya atmıştır. Ancak kısa zamanda bu iddiada çürütülmüştür. Söz konusu çürütülen iddiaya yönelik TAŞ Resim 8'de yer almaktadır.

Şeyma: Limiti kaldırmam lazım ortadan.

Nisa: Ya da buna [$m_d = \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ gösterir] limit yapamaz mıyız?

Şeyma: Ama onu doğrunun eğiminden bulduk ya

Nisa: İşte bunun [teğet doğrusu gösterir] limitini alsak mesela ama niye limitini alıyoruz o zaman da.

Araştırmacı: [Şeyma başını onaylarcasına sallar].

Öğretmen adayları türevin limit tanımındaki limiti kaldıramayınca eşitliğin diğer tarafındaki eğim ifadesine limit ekleme iddiasını ortaya atmışlardır. Ancak bu iddia $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ ifadesi teğetin eğiminden bulunduğu için limit eklenemeyeceği ifadesi ile çürütülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının ispatı çözerken öğrendiği kalıplar dışına çıkamadığını ve dolayısıyla da dışsal şemalardan alışkanlık edinilmiş ispat şemasını kullandığını göstermektedir. Söz konusu argüman çürütülünce öğretmen adayları tekrar türevin limit tanımındaki limitin kaldırılması gerektiği fikrine dönüş yapmışlardır. Bu sırada Selin yeni bir iddia ortaya atmıştır. Bu iddiaya yönelik oluşturulan TAŞ Resim 9'da verilmiştir.

Selin: Bir şey söyleyeceğim. x_0'ı x_1'e götürdüğümüzde burada $\frac{0}{0}$ belirsizliği çıkıyor ya hani x_0'ı x_1'e götürmek yerine x'i x_0'a götürsek direkt buna [eğime] ulaşırız.

Şeyma: Nasıl yani anlamadım.

Selin: x bilinmeyenini x bir şey değil burada x'i direkt x_0'a götürsek sonra x_0 yazdığımız her yere x yazacaksınız.

…

Selin: Seçeceğim bir noktaya yaklaşıyorum. Teğet ya bu en son buraya geliyorsun x'ten herhangi bir x noktası sonsuz. Sonra bunu 0'a yaklaştırıyorsun, x_0'a eşitliyorsun yani. Limitini aldığında da zaten limit yok olmuş olur yani direkt bu çıkar.

Nisa: Şey gibi mi yani y_1 farazi herhangi bir noktaydı ya hani o da mı öyle?

Gamze: Farazi seçmiş oluyorsun doğru evet.

[Selin dediği şekilde denklemi değiştirmeye başlar.]

Şeyma: Farazi diyorsun ama x, x_0'a giderken diyorsan $f(x) - f(x_0)$ olur. Kuralı değiştirdin şuan.

Selin: Aaa evet!

Şeyma: Yaaa tabi ki o olur mu yine bu aynı mantığa çıkacaksın zaten görsel ispatın bu senin limit tanımın değişir o zaman.

Selin x_1 gibi tek bir noktadan değil de sonsuz noktadan yaklaşılırsa limitin yok olacağı iddiasını ortaya atmış ancak Şeyma bu iddiayı çürütmüştür. Söz konusu çürütülen iddia her ne kadar akıl yürütmeler aracılığıyla oluşsa da sembollerin yanlış kullanımı sonucunda ortaya atıldığı için dışsal şemalardan sembolik ispat şeması kullanılmıştır. Bu esnada Nisa'nın "Şeyi merak ediyorum ama gerçekten. Şeyma'nın dediği gibi denk iki taraf mı çıkmalı yoksa zaten bunu biliyoruz diye yapabiliyor muyuz?" ifadesi ile birlikte tekrar Resim 8'deki çürütülen iddiaya dönüş yapmışlardır. Gamze artık arkadaşlarını ikna etmek için görsel üzerinde çizimler yapmaya başlamıştır.

Gamze: İşte ben de aslında şu limit kavramını tam olarak şöyle söyledim. x_0'dan zaten buraya yaklaşmak hedefin değil mi? Ben hangi sayıdan sayıya yaklaşırsam yaklaşayım sadece yaklaşmak demek bu yaklaşmak yani hangi sayı olursa olsun sonucum değişmeyecek burada. Seçtiğim ifade benim sonucumu değiştirmeyecek.

Şeyma: Bak Gamze diyor ki bunu yaklaştırmaya çalışmıyor mu [x_0 noktasından kalemini x_1'e doğru yaklaştırır] değişmiyor diyor. Bu buraya yaklaşırken a noktası da y_0'dan y_1'e yaklaşıyor.

Gamze: Tamam işte yaklaşıyor. Şurada b noktası seç şurada c noktası seç [eğri üzerinde farklı iki nokta gösterir.]

Şeyma: Tamam yine x_1'e yaklaşıcak.

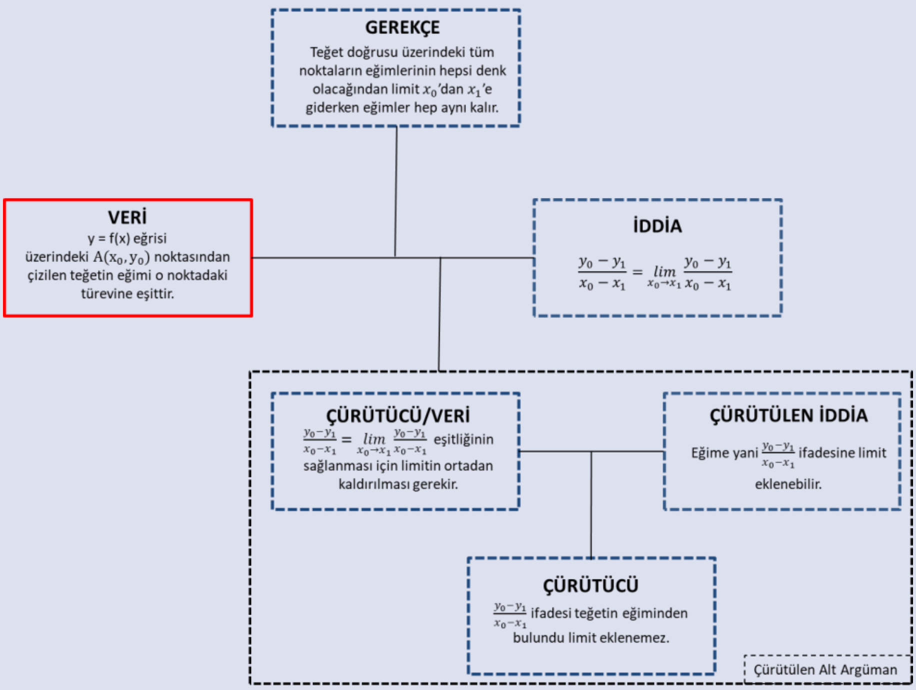
Gamze: Tamam o noktayı da değiştirebiliyorsun zaten burada da üçgen oluşturabilirsin sen [eğimi belirlemeye yönelik bir üçgen çizer]. Burada oluşturduğunun değeri farklı çıkacak ya hangi değerle yaklaşırsan yaklaş hangi x değeri hangi y değeri olursa olsun kastettiğim şey hangisini seçersen seç yine aslında şurası [$\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1} = \lim_{x_0 \to x_1} \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ gösterir] aynı kalmış oluyor.

Nisa: Eğim değişmeyecek değil mi?

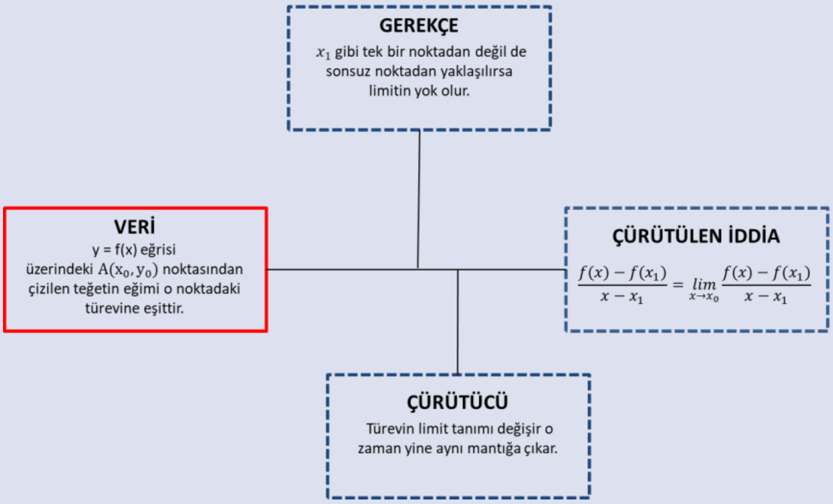
Gamze: Evet. Görsel ispat gibi dediğim şey buydu aslında. Hani grafik üzerinde hangi noktayı seçersen seç değişmiyor demek istediğim bu.

Şeyma: Haa anladım.

Öğretmen adaylarının yürüttüğü bu tartışmada Gamze nihayet arkadaşlarını koordinat düzlemi üzerinde birkaç çizim yaparak ikna etmeyi başarmıştır. Bu durum basit çizimlerin veya sezgilerin temel alarak arkadaşlarını ikna edilmesini sağlayan deneysel şemalardan algısal ispat şemasının kullanıldığını göstermektedir. Tartışma bu şekilde sonlanmış ve Gamze'nin son yaptığı açıklamada herkes hem fikir olmuştur. Tartışmanın sonunda araştırmacı ortak bir karara varıp varmadıklarını sormuş ve öğretmen adayları vardıklarını belirtmiştir. En sonda araştırmacı ispatı açıklamak amacıyla tartışma süresince ifade edilen argümanları özetleyerek türevin geometrik yorumunu içeren teoremi açıklamıştır.



Resim 8. Ortaklaşa argümantasyon sürecinin ana iddiasının çürütücüsünün çürütülmesine ilişkin TAŞ



Resim 9. Ortaklaşa argümantasyon sürecinin üçüncü iddiasına ilişkin TAŞ

Argümantasyon Süreci ve İspat Şemalarına Genel Bir Bakış

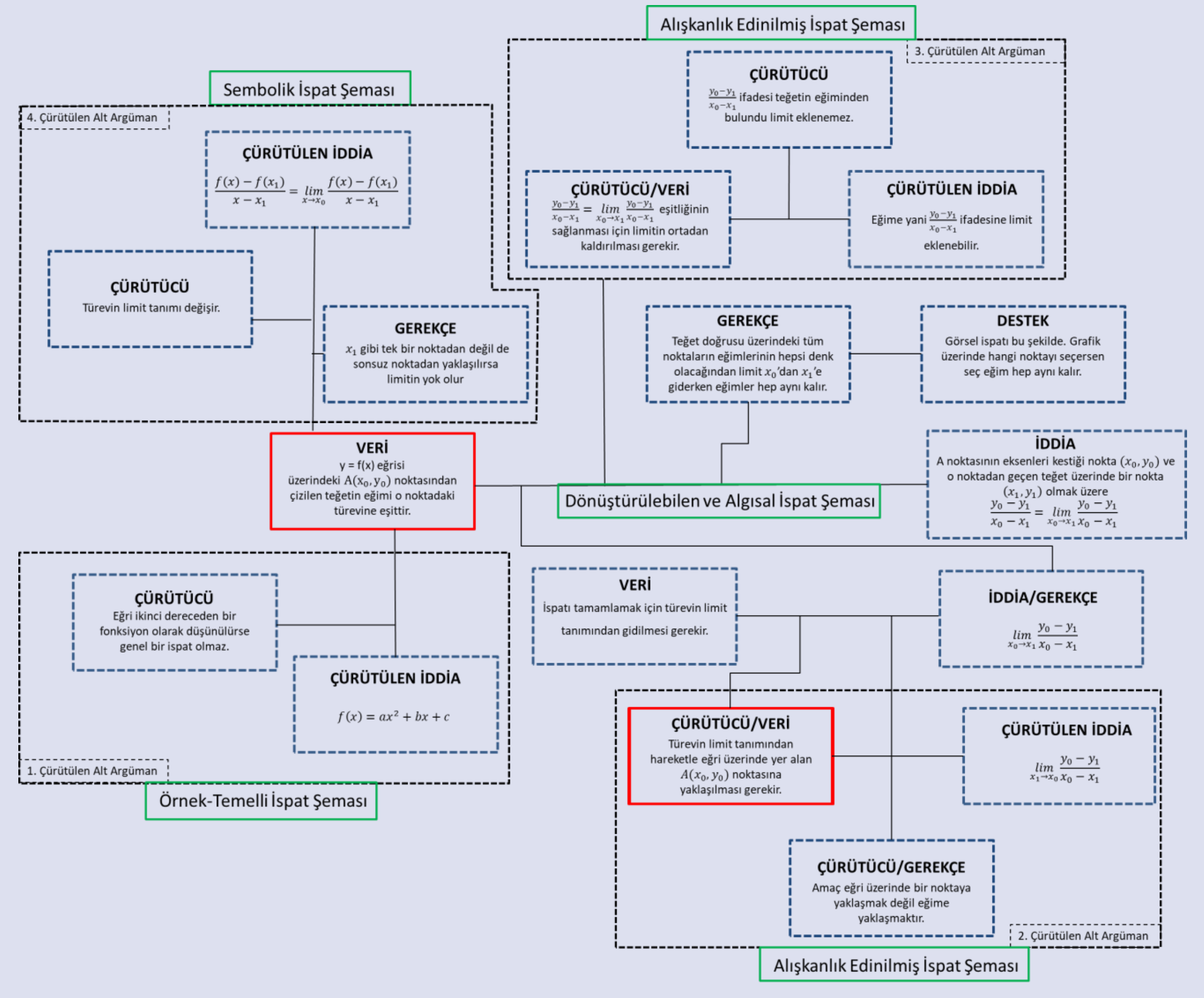
Bulguların bu alt bölümünde ortaklaşa argümantasyon sürecinin tamamının TAŞ'ı ve bu şema üzerinde kullanılan ispat şemalarına yer verilmiştir (bkz. Resim 10). Bu şema argümantasyon sürecinin bileşenlerini ve bu bileşenlerin hangi göreve hizmet ettiklerini görebilmek ve bu argümanlar oluşturulurken hangi ispat şemalarının kullanıldığını görebilmek adına genel bir çerçeve oluşturmaktadır.

Argümantasyon sürecinde Resim 10'da görüleceği üzere ilk olarak öğretmen adayları örnek-temelli ispat şemasını kullanarak, soruda belirtilen f(x) eğrisini bir parabol olarak düşünmüşler ancak kısa zamanda bu iddia o şekilde bir ispatın genel bir ispata girmeyeceği kanısıyla çürütülmüştür. Bunun üzerine öğretmen adayları türevin limit tanımından gitmeleri gerektiği gerekçesi ile ana iddiayı ortaya atmışlardır. Bu iddia, süreç boyunca öğretmen adaylarının doğruluğunu göstermeye çalıştıkları ve sonunda fikir birliğine vardıkları ifade olduğu için ana iddia olarak nitelendirilmiştir. Ancak öğretmen adayları türevin tanımı gereği eğri üzerindeki noktaya yaklaşmaları gerekirken onlar o noktadan geçen teğet üzerinde (x_1, y_1) noktasını belirlemişler ve bu noktaya yaklaşmışlardır. Araştırmacılar biri, öğretmen adaylarının yanlışını ortaya çıkarmak ve tartışmayı tetiklemek için ikinci alt argümanda yer alan çürütücüyü ortaya atmıştır. Ancak öğretmen adayları alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını kullanarak eğri üzerinde bir noktaya yaklaşılması gerektiği konusunda fikir birliği sağlamışlar ve araştırmacının ifadesini çürütmüşlerdir. Hemen ardından ana iddiaya geri dönüş yapmışlar ve bu esnada bir öğretmen adayı ana iddianın doğruluğunun kabul edilmesi için alışkanlık edinilmiş ispat şemasını kullanarak, türevin limit tanımındaki limitin ortadan kaldırılması gerektiği çürütücüsünü ortaya atmıştır. Buradan hareketle üçüncü alt argüman ortaya çıkmıştır. Söz konusu limitin kaldırılması gerektiği fikrini gerekçelendiremeyen öğretmen adayları eşitliğin diğer tarafında yer alan eğim ifadesine limit eklenebileceğine yönelik bir iddia ortaya atmışlar ancak hemen ardından bu iddiayı da çürütmüşlerdir. Son olarak öğretmen adayları sembolik ispat şemasını kullanarak, ana iddiada yer alan matematiksel modeldeki gibi teğet üzerindeki belirledikleri noktaya tek bir noktadan değil sonsuz noktadan yaklaşılması gerektiği iddiasını ortaya atmış ancak dördüncü alt argüman olarak yer alan bu iddia da fikir birliğine varılarak çürütülmüştür. Bu durumda öğretmen adayları tekrar ana iddiaya odaklanmışlardır. Bir öğretmen adayının sezgilerini kullanıp koordinat düzlemi üzerinde çizimler yaparak diğer bir deyişle algısal ispat şemasını kullanarak arkadaşlarını ikna etmesiyle fikir birliğine ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarının fikir birliğine vardıkları iddianın yani ispat çözümlerinin yanlış olması nedeniyle araştırmacılar, öğretmen adaylarının hata yaptığı kısmı belirterek gerekli açıklamaları yapmış ve söz konusu teoremin ispatını açıklamıştır.

Resim 10 genel olarak değerlendirildiğinde, argümantasyon sürecinin bir ana argümandan ve dört çürütülen alt argümandan oluştuğu görülmektedir. Söz konusu dört alt argümanın üçünde dışsal şemalardan alışkanlık edinilmiş ve sembolik ispat şemalarının kullanıldığı birinde ise deneysel şemalardan örnek-temelli ispat şemasının kullanıldığı görülmektedir. Bu anlamda çürütülen alt argümanlarda dışsal ve deneysel ispat şemalarının kullanılması dikkat çekmektedir. Argümantasyon sürecinin ana iddiasına ise hem mantıksal çıkarım ve işlemsel düşünme aracılığıyla ulaşıldığı için analitik şemalardan dönüştürülebilen ispat şemasının hem de öğrencilerin basit çizimlerini veya sezgilerini temel alarak ulaşıldığı için deneysel şemalardan algısal ispat şemasının kullanıldığı belirlenmiştir. Sonuç olarak, matematik öğretmeni adayları türevin geometrik yorumunun ispatını ortaklaşa olarak yaparken, dışsal, deneysel ve analitik ispat şemalarının tümünü kullandığı ancak dışsal ve deneysel ispat şemalarını kullanarak oluşturdukları argümanları çürüttükleri tespit edilmiştir.

Resim 10'daki renklendirmelere bakıldığında ortaklaşa argümantasyon sürecinde aktif olarak öğretmen adaylarının yer aldığı ve araştırmacının minimum etkileşime geçtiği görülmektedir. Araştırmacı başlangıçta teoremi öğretmen adaylarına sunduktan sonra kendi aralarında tartışmalarına olanak tanımıştır. Bir ara tartışmanın duraklaması ile birlikte araştırmacı tarafından ikinci alt argümanın iddiası ortaya atılmış ve söz konusu iddia öğretmen adayları tarafından çürütülmüştür. Daha sonra tartışma öğretmen adayları tarafından tekrar tetiklenmiş ve her ne kadar yanlış çözümlere yönelseler de araştırmacı onları etkilememek için müdahalede bulunmamıştır. Süreçte ana iddia ortaya atıldıktan sonra bu iddianın yanlışlığı iki kez çürütülmeye çalışılmış ancak başarısız olunarak ana iddia gerekçelendirilmiş ve üzerinde fikir birliğine varılmıştır.

Resim 10 ortaklaşa argümantasyon sürecinin bileşenleri ve işlevleri açısından incelendiğinde öğretmen adaylarının genel anlamda çürütücülerden sıklıkla yararlandığı görülmektedir. Bunun yanında biri araştırmacı biri öğretmen adayları tarafından olmak üzere ana iddiayı çürütmek için sunulan ifadeler yine öğretmen adayları tarafından ortak karara vararak çürütülmüştür. Özellikle çürütücülerin veri ve gerekçe rolünde olduğu durumlar dikkat çekmektedir. Çürütücülerin başka bir görevi de yalnızca iddiayı değil bazen de alt argümanların geçerliğini yok etmek olmuştur. Öte yandan öğretmen adaylarının ortaya attıkları iddiaları desteklemek için gerekçelerini de ifade ettikleri görülmektedir. Bunlara ek olarak ortaklaşa argümantasyon sürecinde öğretmen adaylarının yalnızca bir kez destekleyici kullanıldığı ve hiç niteleyici ifade kullanılmadığı görülmektedir.



Resim 10. Ortaklaşa Argümantasyon Sürecinin Genel TAŞ'ı

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin ispatlama sürecinde oluşturdukları ortaklaşa argümanları incelemeyi ve bu argümanların ispat şemaları dikkate alınarak yorumlanması amaçlanan bu araştırmada katılımcıların türevin geometrik yorumunu ortaklaşa ispatladıkları bir uygulama gerçekleştirilmiştir. Conner (2008) argümantasyon sürecinin birden çok alt argümandan oluştuğunu belirtmektedir. Bu araştırmada da bu durumu destekler nitelikte, ispat süreci boyunca dört farklı alt argüman ortaya çıkmıştır. İlk alt argümanda deneysel şemalardan örnek-temelli ispat şeması kullanılırken diğer üç alt argümanda dışsal şemalardan alışkanlık edinilmiş ve sembolik ispat şeması kullanılmıştır. Literatür incelendiğinde ortaokul öğrencilerinin (Liu & Manouchehri, 2013; Şen & Güler, 2015) ve 1. Sınıf (İskenderoğlu vd., 2010; Oflaz vd., 2016) ve 2. Sınıf (Pala & Narlı, 2018) ilköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin ispat şemalarının incelendiği çalışmalarda çoğunlukla dışsal ve deneysel ispat şemalarının kullanıldığı belirlenmiştir. Ancak bu araştırmada dışsal ve deneysel şemalar kullanılarak oluşturulan alt argümanların hepsi çürütülmüştür. Araştırmada ulaşılan bu sonuç, bahsi geçen araştırmalardan farklılığını ortaya koymaktadır. Literatürde yer alan söz konusu çalışmalarda, her bir öğrencinin ispatı bireysel olarak yapması istenmiştir. Ancak bu araştırmada öğretmen adayları ispatı ortaklaşa argümantasyon süreci içerisinde gerçekleştirmiş olup, bu süreçte birbirlerini ikna etmeye çalışmışlardır. Dolayısıyla araştırmada söz konusu farklılığın, dışsal ve deneysel ispat şemalarının öğretmen adaylarını ikna etmede yetersiz kalmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Araştırmanın verileri öğretmen adaylarının ortak karara vardıkları ana iddiada dönüştürülebilen ve algısal ispat şemalarının kullanıldığını göstermektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ana iddiada fikir birliğine varmalarının, akıl yürütmeler ve matematiksel ilişkileri kullanarak ürettikleri analitik argümanların öğretmen adaylarını fikir birliğine varmasına yardımcı olduğu söylenebilir. Kısaca öğretmen adaylarının dışsal ve deneysel şemalara dayalı olarak birçok argüman üretmesine karşın ikna olmadıklarını ve bu argümanları çürüttükleri ancak analitik ve deneysel olmak üzere iki ispat şemasına dayalı üretilen ana iddiada fikir birliğine vardıkları görülmektedir. Diğer bir deyişle öğretmen adayları analitik ispat şemalarını kullanarak birbirlerini ikna etmeyi başarmışlardır. Aydoğdu-İskenderoğlu'na (2016) göre analitik ispat şemaları matematikte ispatlamada son nokta olarak görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının matematiksel bir durumun doğruluğuna birbirlerini ikna etmek için akıl yürütme yardımı ile önceki bilgilerini yeni durumlara uygulamasıyla birlikte ortak karara ulaştıkları söylenebilir. Knuth vd. (2009) ve Şengül ve Güner (2013) çalışmalarında sınıf düzeyi arttıkça ispat şemasının dışsal düzeyden analitik düzeye değiştiğini ya da gerekçelendirme biçimlerinin dışsal ve deneysel argümanlar yerine analitik argümanlara doğru değiştiğini göstermiştir. Literatürde yer alan çalışmaların ortaokul veya matematik öğretmenliği ilk sınıf öğrencileriyle gerçekleştirildiği görülmektedir (Liu & Manouchehri, 2013; İskenderoğlu vd., 2010; Oflaz vd., 2016; Şen & Güler, 2015). Dolayısıyla araştırmada elde edilen bu sonucun, çalışmanın 3. Sınıf lisans öğrencileri ile gerçekleştirilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Harel ve Sowder'a (1998) göre öğrenciler birden fazla ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya koyabilmektedir. Bu varsayım ile tutarlı olarak araştırmada öğretmen adaylarının ispat sürecinin tamamında dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç tür ispat şemasını kullandığı belirlenmiştir. Bu durum literatürde yer alan (Flores, 2006; Housman & Porter, 2003; Şen & Güler, 2015; Şengül & Güner, 2013) çalışmalarla benzerlik göstermektedir. Bunun yanında ana iddiaya ulaşılırken ağırlıklı olarak analitik şemalardan dönüştürülebilen ispat şemasını ortaya koyan tepkiler edilirken aynı zamanda deneysel şemalardan algısal ispat şeması olarak nitelendirilebilecek ifadelere rastlanmıştır. Benzer şekilde Çontay ve Duatepe-Paksu (2019) ve Housman ve Porter (2003) çalışmalarında da bazı durumlarda öğretmen adayları bir ispat şemasını ortaya koyan tepkileri daha ağırlıklı olarak gösterirken, diğer ispat şemasına ilişkin tepkiler de gösterebileceklerine ilişkin deliller ortaya koymuşlardır.

İlköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin türevin geometrik yorumunu ispatlamaları istenilen bu araştırmada katılımcılar aktif olarak argümantasyon sürecinde yer almışlar ve söz konusu ispatı ortaklaşa olarak gerçekleştirmişlerdir. Ortaklaşa argümantasyon sürecine yönelik oluşturulan TAŞ'lar incelendiğinde sürecinin bileşenlerini büyük oranda öğretmen adaylarının oluşturduğu görülmektedir. Bu bileşenler genellikle ön bilgilerinden hareketle oluşturulmuştur. Benzer şekilde Tekin-Dede vd. (2022) çalışmasında öğrencilerin dönel cisimlerin yüzey alanı modelini ortaklaşa oluşturdukları bir uygulama gerçekleştirilerek hem argümantasyon bileşenlerinin büyük çoğunluğunun öğrenciler tarafından oluşturulduğu hem de bu bileşenlerin çoğunlukla önceki derslerde edindikleri bilgilere dayalı olarak oluşturulduğu belirlenmiştir. Bunun yanı sıra Pala ve Narlı (2018) öğretmen adaylarınının ön bilgilerinin kullanılan ispat şemalarını etkileyebileceğini vurgulamaktadır. Buradan hareketle öğretmen adaylarının ön bilgilerinin ve dolayısıyla ispat şemalarının argümantasyon sürecinin şekillenmesinde önemli bir etken olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Argümantasyon sürecinde yer alan bileşenlerin işlevleri göz önüne alındığında ana iddia ortaya atıldıktan sonra ana iddia biri araştırmacı diğeri öğretmen adayları tarafından olmak üzere iki kez çürütülmeye çalışılmıştır. Ancak söz konusu çürütücüleri veri konumuna getirilerek üzerinde tartışmaya başlayan öğretmen adayları her iki çürütücü/veriyi de çürütmüştür. Bu durum literatürde genellikle alt argümanların veri/iddia olarak birbirine bağlı olduğu gösterilen (Krummheuer, 1995;

Krummheuer, 2007; Conner vd., 2014a; Tekin-Dede, 2019) birçok çalışmadan farklılık göstermektedir. Aynı zamanda öğretmen adayları bir varsayımda bulunmaya ilişkin bir argüman oluştururken, iddiaları ana iddianın gerekçesi hâline gelmiştir. Diğer bir deyişle bir iddia ortaya atılmış ve söz konusu iddia ana iddianın gerekçesi haline gelmiştir. Bir alt argümanın başka bir argümana iddia/gerekçe ile bağlanmış olması Tekin-Dede (2019) çalışması ile paralellik göstermektedir. Stephan ve Rasmussen (2002) bireyler arasında tartışılan fikirlerin paylaşıldığı ve bu durumların tartışmalarda örtük olarak ele alındığı takdirde gerekçelerin bir iddia olabileceğini belirtmektedir. Ancak bu araştırmada iddia/gerekçe durumu çok belirgin olarak yer almaktadır. Bu durumun nedeninin öğretmen adaylarının mümkün olduğunca gerekçelerini sorgulayarak doğru sonuca ulaşmak istemelerinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Argümantasyon süresince yalnızca bir alt argümanda gerekçeyi desteklemek için destekleyici bileşeni kullanılmıştır. Söz konusu destek ana iddianın doğruluğuna arkadaşını ikna etmek için gerekçeyi sunan kişi tarafından ortaya atılmıştır. Yani destek arkadaşının gerekçesine ikna olmayan ve sorgulayan bir öğretmen adayının soru sorması üzeri ortaya çıkmıştır. Bunun yanında diğer hiçbir gerekçe sorgulanmamış ve diğer alt argümanlarda destekleyici bileşene rastlanmamıştır. Bu durumun sebebinin destekleyicilerin genellikle üstü kapalı olmasından ve sözlü olarak ifade edilmediği için her zaman ortaya çıkmamasından kaynaklandığı söylenebilir (Conner vd., 2014a; Inglis vd., 2007). Bunun yanında süreç boyunca niteleyici bileşeninin kullanılmadığı dikkat çekmektedir. Matematiksel ispatlar bir iddianın doğruluğunun ya da yanlışlığının ortaya koyulmasıdır. Dolayısıyla ispatlar varsayımlara dayalı olarak gerçekleştirilmediğinden diğer bir deyişle matematiksel olarak sağlam temellere oturtularak gerçekleştirildiğinden iddianın kesinlik derecesi hakkında bir niteleyici kullanılmadığı düşünülmektedir.

Harel ve Sowder (1998) ispatın doğruluğu ya da yanlışlığıyla değil öğrencilerin ne düşündüklerine odaklanmalarını sağlamak amacıyla ispat şeması terimini ortaya atmışlardır. Bu bakış açısı, her ne kadar öğretmen adaylarının ortak karara vardıkları ana iddia yanlış olsa da, araştırmada öğretmen adaylarının argümantasyon sürecinde argümanlarının doğruluğu ya da yanlışlığıyla ilgilenmeksizin oluşan argümanlara ispat şemaları dikkate alınarak odaklanılmasını sağlamıştır. Bu noktada araştırmacılar süreç boyunca öğrencilerin düşünceleri desteklemişlerdir. Bu anlamda ortaklaşa argümantasyon sürecinde araştırmacının rolü de görmezden gelinmemelidir. Ancak bu araştırmada argümantasyon sürecinde öğretmen desteği araştırılmadığı için ortaklaşa argümantasyon süreçlerinin incelendiği bazı çalışmalarda olduğu gibi (Conner vd., 2014a; Tekin-Dede vd., 2022) araştırmacılar öğrencileri yönlendirmekten kaçınmış hatta yanlış sonuca gidiyorlarsa bile düşünceleri desteklenmiştir. Bu sayede öğretmen adayları yanlış iddianın doğru olduğunu düşünerek bazı durumlarda o iddianın gerekçelerini ifade etmişler bazı durumlarda ise iddianın yanlışlığını fark ederek çürütmeyi başarmışlardır. Literatür incelendiğinde öğretmen desteğinin incelenmediği Conner ve diğerleri (2014b) çalışmasında öğretmenler öğrencileri ortaklaşa argümantasyon sürecinde yönlendirmeden kaçınılmış, yanlış sonuca gidiyorlarsa bile düşünceleri desteklemiştir. Benzer şekilde Tekin-Dede ve arkadaşları (2022) ise dönel cisimlerin yüzey alanının hesaplanmasına yönelik gerçekleştirdikleri çalışmada ortaklaşa argümantasyon süreci öğrencilerin liderliğinde ilerlemiş ancak öğrenciler yüzey alanı modeline ulaşamamış olup araştırmacı konuyu toparlamak amacıyla ders süresince ifade edilen argümanları özetleyerek yüzey alanı modelini açıklamıştır. Bunun yanı sıra süreç içerisinde araştırmacılar argümantasyon sürecini desteklemek amacıyla öğrencilerin açıklama yapmalarını isteme (Conner vd., 2014a; Sahin & Kulm, 2008) ve öğrenci ifadelerini tekrar etme (Planas & Morera, 2012) gibi eylemleri argümantasyon sürecinin sürdürülebilirliğini sağlamıştır.

İspat şemalarının incelenmesi öğrencilerin matematiksel durumlardaki düşünme tepkilerini, bir bireyin matematiksel bir durumun doğruluğuna ya da yanlışlığına neyle ikna olduğunu ve arkadaşlarını ikna etmek için neyi tercih ettiğini görmek açısından önemlidir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016). Bunun yanında ortaklaşa argümantasyon sürecinin incelenmesi tartışma sürecinde bir argümanın oluşturulması, uygun argümanların belirlenmesi, öğretilmesi ve değerlendirilmesi konusunda yardımcı olmaktadır. Dolayısıyla bu araştırma, öğretmen adaylarının ispat şemalarının ve ortaklaşa argümantasyon süreçlerinin birlikte incelenmesi açısından önem arz etmektedir. Bunun yanında bu iki çerçevenin birlikte incelenmesi literatürden farklılığını ortaya koymaktadır. Bu araştırmanın bulguları tek bir katılımcı grubu ve tek bir ispat sorusu ile sınırlıdır. Bu sonuçları diğer katılımcılardan ve farklı görev uygulamalarından elde edilecek sonuçlara genellemek mümkün değildir. Ancak ortaklaşa argümantasyon sürecinde kullanılan ispat şemalarının argümantasyon süreci ile bir ilişki içerisinde olduğu açıktır. Böylece gelecekte farklı katılımcılardan ve farklı ispat soruları ile ispat şemaları ve argümantasyon süreci arasındaki ilişkinin daha derinlemesine araştırılması önerilmektedir. Bunun yanında ortaklaşa argümantasyon sürecinde ispat şemalarını ve argümanları incelemeyi amaçlayan gelecekteki çalışmaların uzun vadeli uygulamaları içermesi ve bu uygulamaların her birine araştırmacıların aktif olarak katılması önemlidir. Bu önerilere ek olarak süreç içerisinde araştırmacıların uygun müdahalelerde bulunduğunda alt argümanların ve ispat şemalarının nasıl şekillendiğinin incelenmesi mümkündür. Bunun nedeni araştırmacı rolünün araştırılacağı söz konusu süreçte öğrencilerin baş edemeyecekleri durumlarla yüzleşmeleri için cesaretlendirilmesi ile birlikte grup içi tartışmalarda daha etkili argümanlar oluşturacağı ve daha sık analitik ispat şemalarını kullanılacağı öngörülmektedir.

Extended Abstract

Introduction

Proof schemes are defined as a way of thinking as well as being a classification of proofs that an individual or community uses to show the correctness or falsity of a mathematical situation (Harel & Sowder, 1998). In this study, unlike the studies in the literature, the proof schemes of the participants are discussed from an argumentation-based perspective. Argumentation is defined as the process of convincing the opposing community of the validity of a claim (Krummheuer, 1995) and this convincing process is utilised during proving and reflected in the students' proof schemes (Harel & Sowder, 1998). Studies in the literature reveal that the argumentation process interacts with the proof process (Boero et al., 2010; Doruk, 2016; Urhan & Bülbül; 2016 Pedemonte, 2007a; 2007b; 2008). However, no study was found in which students' proof schemes and arguments were examined in an environment where a mathematical proof was carried out collectively. In this context, it is aimed to examine the arguments and proof schemes created by the mathematics teachers candidates in the process of collective argumentation and to interpret the arguments in question by taking into account the proof schemes in the study.

Method

The study was conducted as one group case study. The participants of the study were four students enrolled in the third year of the Mathematics Teaching program at a university. The data of this research were collected with video recordings containing the solution process of a theorem, researcher notes, and students' worksheets. Data analysis was carried out in two stages in this study. The video recordings were transcribed and, the transcript was divided into sub-argument sections according to the claims made and then the proof schemes used by the students were determined.

Results

The findings of the study showed that students actively participated in the argumentation process and four different sub-arguments emerged in this process. Externally based and experimental proof schemes were used in these sub-arguments, and all of these sub-arguments were refuted by the students. The data of the study showed that analytical proof schemes were used predominantly in the main claim that the students agreed on. Data, claim, justification, rebuttal, and supporting components emerged from the components of the argumentation process. Particularly, it was a remarkable finding that students put forward rebuttals by listening to each other's explanations carefully, and some of them were refuted by other students. In addition, it was determined that the qualifier component was not used in the argumentation process.

Discussion

It is noteworthy that externally based and experimental proof schemes were used in all of the refuted sub-arguments. This situation shows that students were not convinced by externally based arguments based on experimental schemas therefore they formed new arguments. When the literature was examined, it was seen that the students mostly presented arguments that revealed the externally based and experimental proof scheme (Liu & Manouchehri, 2013; İskenderoğlu et al., 2010; Oflaz et al., 2016; Şen & Güler, 2015). However, the conclusion reached in this study was that, unlike the aforementioned studies, the arguments produced on externally based and experimental schemes were refuted, that is, these schemes were insufficient to convince students in the proof process. The data of the study showed that analytic proof schemes were used predominantly in the main claim that the students have come to a common decision. According to Aydoğdu-İskenderoğlu (2016), analytical proof schemes are seen as the last point in proving in mathematics. Therefore, it can be said that students reach a common decision by applying their previous knowledge to new situations with the help of reasoning in order to convince each other of the correctness of a mathematical situation. According to Harel & Sowder (1998), students can present reactions to more than one proof scheme. Consistent with this assumption, it was determined that students used three types of proof schemes in the entire proof process: externally based, experimental and analytical. Conner (2008) states that the argumentation process consists of multiple sub-arguments. In this study, it was seen that it consisted of four sub-arguments that support this situation. The role of the researcher in the argumentation process, in which students actively work, should not be ignored. In this study, the researchers avoided directing the students, and even if they were going to the wrong conclusion, their thoughts were supported. In this way, the students thought that the false claim was true and in some cases, they expressed the reasons for that claim. They realized the falseness of the claim and succeeded in refuting it in some cases, too. Similarly, in some studies in the literature, it was seen that the researchers did not judge the students during the course and they were given the opportunity to make false claims. (Conner et al., 2014a; Tekin-Dede et al., 2022). It can be said that this situation contributes to the continuation of the argumentation process.

Pedagogical Implications

The findings of this study are limited to one group of participants and a single proof question. Therefore, in the future, it is suggested that the relationship between different participants and different proof questions, proof schemes and the argumentation process should be explored in more depth. In addition, it is important that future studies include long-term applications and that researchers actively participate in each of these applications. In addition to these, it is suggested to examine how the sub-arguments and proof schemes are shaped when the researcher makes appropriate interventions during the process.

Etik Kurul İzin Bilgileri

Araştırmanın etik kurul izni, Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından Sosyal ve Beşeri Bilimler Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği kurulu 18.04.2023 tarihinde alınan 8 sayılı kararı ile alınmıştır.

Araştırmanın Etik Taahhüt Metni

Yapılan bu çalışmada bilimsel, etik ve alıntı kurallarına uyulduğu; toplanan veriler üzerinde herhangi bir tahrifatın yapılmadığı, karşılaşılacak tüm etik ihlallerde "Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi ve Editörünün" hiçbir sorumluluğunun olmadığı, tüm sorumluluğun Sorumlu Yazara ait olduğu ve bu çalışmanın herhangi başka bir akademik yayın ortamına değerlendirme için gönderilmemiş olduğu sorumlu yazar tarafından taahhüt edilmiştir.

Kaynaklar

Aydoğdu-İskenderoğlu, T. (2016). Kanıt ve kanıt şemaları. E. Bingölbali, S. Arslan. ve İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler içinde* (ss. 101-114). Pegem Akademi.

Bingölbali, E. (2015) Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Eds.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri içinde* (4. Baskı, ss. 223-252). Pegem Akademi.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., and Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. M. F. Pinto and T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 179-209). Brasile: PME.

Brown, R. A. J., and Renshaw, P. D. (2000). Collective argumentation: A sociocultural approach to reframing classroom teaching and learning. In H. Cowie and G. Van Der Aalsvoort (Eds.), *Social interaction in learning and instruction: The meaning of discourse for the construction of knowledge* (pp. 52–66). Pergamon: Elsevier Science Inc.

Brown, R. (2017). Using collective argumentation to engage students in a primary mathematics classroom. *Mathematics Education Research Journal*, 29(2), 183-199. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0198-2

Bülbül, A., ve Urhan, S. (2016). Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(1), 351-373. https://doi.org/10.17522/nefefmed.00387

Canbazoğlu-Bilici, S. (2019). Örnekleme yöntemleri. H. Özmen ve O. Karamustafaoğlu (Eds.), *Eğitimde araştırma yöntemleri içinde* (s. 56-78). Ankara: Pegem Akademi

Conner, A. (2008). Expanded Toulmin diagrams: A tool for investigating complex activity in classrooms. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano and A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 361–368). Morelia, Mexico: Cinvestav-UMSNH.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., and Francisco, R. T. (2014a). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. Educational Studies in Mathematics, 86(3), 401-429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., and Francisco, R. T. (2014b). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation, *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 181-200. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921131

Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi*. [Yayımlanmamış Doktora Tezi]. Atatürk Üniversitesi.

Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true?. *School Science and Mathematics*, 106(3), 124-132. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18169.x

Harel, G., and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, 7, 234-283.

Harel, G., and Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics* (Vol 2, pp. 805-842). NCTM.

Housman, D., and Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-avarage mathematics students, *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 139-158. https://doi.org/10.1023/A:1025541416693

Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P., and Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics,* 66(1), 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

İskenderoğlu, T., Baki, A., and İskenderoğlu, M.(2010). Proof schemes used by first grade of preservice mathematics teachers about function topic. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 531-536. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.192

Knipping, C., Reid, D. (2015). Reconstructing Argumentation Structures: A Perspective on Proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. In Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., and Presmeg, N. (Eds) *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education,* (pp. 75-101). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_4

Knuth, E., Choppin, J., and Bieda, K. (2009). Middle school students' productions of mathematical justification. In M. Blanton, D. Stylianou, and E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (pp. 153–212). NY: Routledge.

Krummheuer G. (1995) The ethnography of argumentation. In Cobb P., and Bauersfeld H. (Eds), *Emergence of Mathematical Meaning* (pp. 229–269). NJ: Routledge

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), 60-82. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001

Liu, Y., and Manouchehri, A. (2013). Middle school children's mathematical reasoning and proving schemes. *Investigations in Mathematics Learning*, 6(1), 18-40. https://doi.org/10.1080/24727466.2013.11790328

Merriam, S. B. (2018). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber*. (Çev. S. Turan). Ankara: Nobel Yayıncılık.

Oflaz, G., Bulut, N., and Akcakin, V. (2016). Pre-service classroom teachers' proof schemes in geometry: a case study of three pre-service teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, 63, 133-152. http://dx.doi.org/10.14689/ejer.2016.63.8

Pala, O. ve Narlı, S. (2018). Matematik öğretmen adaylarının sayılabilirlik kavramına yönelik ispat şemalarının incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *12*(2), 136-166. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.506425

Pedemonte, B. (2007a). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?, *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23-41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Pedemonte, B. (2007b). Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra. In *Proceedings of the V Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME* 5, (pp. 643–652). Larnaca, Cyprus.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, 385-400. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0085-0

Planas, N., and Morera, L. (2011). Revoicing in processes of collective mathematical argumentation among students. In M. Pytlak, T. Rowland, and E. Swobod (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research İn Mathematics Education* (pp. 1356-1365). Poland: CERME.

Schabel, C. (2005). An Instructional Model for Teaching proof Writing in the Number Theory Classroom. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 15(1). 45-59. https://doi.org/10.1080/10511970508984105

Stephan, M., and Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), 459-490. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00145-1

Şahin, A., and Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(3), 221–241. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9071-2

Şen, C., and Güler, G. (2015). Examination of secondary school seventh graders' proof skills and proof schemes. *Universal Journal of Educational Research*, 3(9), 617-631. https://doi.org/10.13189/ujer.2015.030906

Şengül, S., ve Güner, P. (2013). DNR tabanlı öğretime göre matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarının incelenmesi. *International Journal of Social Science*, 6(2), 869-878.

Tall, D. (1995). Cognitive development, representations and proof. *Justifying and Proving in School Mathematics*, 27-38.

Tekin-Dede, A., Özer, A. Ö., ve Bukova-Güzel, E. (2022). Dönel cisimlerin yüzey alanının hesaplanması sürecindeki argümanların incelenmesi. *Cumhuriyet International Journal of Education*, 11(4): 587-603. https://doi.org/10.30703/cije.1072163

Tekin-Dede, A. (2019) Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50:2, 292-314, https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825

Vygotsky L. (1978). Interaction between learning and development. In M. Gauvain and M. Cole (Eds), *Readings on the Development of Children* (pp. 34-40). NY: Scientific American Books.