Cumhuriyet International Journal of Education, 12(4): 868-881, 2023
DOI: https://dx.doi.org/10.30703/cije.1243118

Cumhuriyet International Journal of Education

| cije.cumhuriyet.edu.tr | Founded: 2011 Available online, ISSN: 2147-1606 Publisher: Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Examining Mathematical Proof and Problem-Solving Processes of Mathematics Teacher Candidates by Think-Aloud Method [#]

Aysun Yeşilyurt Çetin[1,a,*], **Ramazan Dikici**[2,b]

[1] *Kazım Karabekir Faculty of Education, Atatürk University, Erzurum, Türkiye*
[2] *Faculty of Education, Mersin University, Mersin, Türkiye*
**Corresponding author*

Research Article

Acknowledgment
 # Part of this article was presented at the VIII. International Congress of Educational Research

History
Received: 27/01/2023
Accepted: 18/08/2023

iThenticate
This paper was checked for plagiarism using iThenticate during the preview process and before publication.

ABSTRACT

This research was carried out in order to reveal how the mental processes of pre-service mathematics teachers are while making mathematical proofs and solving problems, and what their views are about the thinking aloud method. Within the scope of this research based on the case study design, 4 pre-service teachers were asked to express their thoughts aloud, to solve 2 problems, and to do 2 algebraic proofs. Teacher candidates' thinking-aloud processes were video-recorded. The data obtained by transcribing the videos were analyzed and interpreted with the descriptive analysis method. As a result of the research, it was seen that although the pre-service teachers had a general understanding of how to prove the theorem and problem-solving, they did not know how to advance the process of proving and problem-solving and how to use the knowledge they had before in a way suitable for their purpose. In addition, according to the pre-service teachers who participated in the application, the thinking aloud method is a method that develops higher-order thinking and allows the individual to understand what he or she is really thinking.

Keywords: Problem solving, mathematical proof, algebraic proof, pre-service mathematics teacher, think aloud

Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspat Yapma ve Problem Çözme Süreçlerinin Sesli Düşünme Yöntemi ile İncelenmesi [#]

Bilgi
 # Bu makalenin bir bölümü VIII. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresi'nde sunulmuştur.
**Sorumlu yazar*

Süreç
Geliş: 27/01/2023
Kabul: 18/08/2023

Bu çalışma ön inceleme sürecinde ve yayımlanmadan önce iThenticate yazılımı ile taranmıştır.

ÖZ

Bu araştırma matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yaparken ve problem çözerken zihinsel süreçlerinin nasıl ilerlediğini ve sesli düşünme yöntemine ilişkin görüşlerinin neler olduğunu ortaya çıkarabilmek amacıyla yapılmıştır. Durum çalışması deseninin esas alındığı bu araştırma kapsamında 4 öğretmen adayından düşüncelerini sesli olarak ifade ederek 2 problemi çözmeleri ve 2 cebirsel ispatı yapmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının sesli düşünme süreçleri video ile kayıt altına alınmıştır. Videolar transkript edilerek elde edilen veriler, betimsel analiz yöntemi ile analiz edilerek yorumlanmıştır. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının teorem ispatının ve problem çözümünün nasıl olacağına yönelik genel bir anlayışa sahip olmalarına rağmen, ispat yapma ve problem çözme sürecini nasıl ilerleteceklerini ve önceden sahip oldukları bilgileri amacına uygun bir biçimde nasıl kullanacaklarını bilemedikleri görülmüştür. Ayrıca uygulamaya katılan öğretmen adaylarına göre sesli düşünme yöntemi üst düzey düşünmeyi geliştiren ve bireyin gerçekte ne düşündüğünü anlamasına imkân tanıyan bir yöntemdir.

Anahtar Kelimeler: Problem çözme, matematiksel ispat yapma, cebirsel ispat, matematik öğretmeni adayları, sesli düşünme

[a] *aysun.yesilyurt@atauni.edu.tr* *https://orcid.org/0000-0002-0344-231X* | [b] *rdikici@mersin.edu.tr* *https://orcid.org/0000-0003-1903-9418*

How to Cite: Yeşilyurt Çetin, A., & Dikici, R. (2023). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapma ve problem çözme süreçlerinin sesli düşünme yöntemi ile incelenmesi. *Cumhuriyet International Journal of Education, 12*(4): 868-881.

Giriş

Günümüzde matematikçilere göre matematik hem teorem ispatlama hem de problem çözmedir (Cellucci, 2017). Problem çözme ve matematiksel ispat yapma birden fazla süreç ve aşamayı içinde barındıran karmaşık düşünsel etkinliklerdir. Bu karmaşık düşünsel etkinlikler sırasında bireylerin düşüncelerini öğrenebilmek ve nasıl bir muhakeme sürecinden geçtiklerini ortaya çıkarabilmek için düşüncelerini sözlü olarak ifade etmelerine ihtiyaç duyulmaktadır. Güneş'e (2012) göre sesli düşünme, düşünme süreç ve aşamalarını sözcüklerle ifade etme işlemidir. Dolayısıyla bu araştırmada matematik öğretmeni adayları (MÖA)'nın problem çözme ve ispat yapma sırasındaki zihinsel süreçlerinin sesli düşünme yöntemi yardımıyla somutlaştırılması ve açığa çıkarılması amaçlanmaktadır.

Bu bölümde öncelikle ispata, problem çözmeye ve bu ikisinin ilişkisine yönelik literatür aktarılacak, ardından sesli düşünme yöntemi ile ilgili bilgi verilecektir. Bu şekilde okuyucu problem çözmenin ve ispat yapmanın önemi ve sesli düşünmenin bu iki düşünsel süreci ortaya koymadaki etkisi hakkında fikir sahibi olacaktır. Bu araştırma kapsamında MÖA'nın matematiksel ispat yapma ve problem çözme süreçlerinin sesli düşünme yöntemi ile incelenmesi ve uygulamaya katılan MÖA'nın sesli düşünme yöntemine yönelik görüşlerinin aktarılması hedeflenmiştir.

Matematikte İspat Yapma ve Problem Çözme

Problem çözme analiz ve sentez yapmayı gerektiren, problemle ilk karşılaşma anında başlayıp verilen bilgiler ışığında elde edilen cevabın gözden geçirilmesiyle sona eren bir süreçtir (Krulik ve Rudnick, 1989). Öğrenciler matematik problemlerini çözerek matematik öğrenme ortamının dışında alışılmadık durumlarda da düşünme yolları, sabır ve merak alışkanlıkları ve özgüven kazanırlar (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Özel bir problem durumunu görselleştirmek için problem çözücünün problemleri kendi kelimeleriyle açıklaması ya da yeniden ifade etmesi; resimler çizerek, diyagramlar ya da grafikler oluşturarak ve zihinsel imgeler oluşturarak problemleri görselleştirmesi; hedefler belirlemesi ya da varsayımda bulunması ve problemi çözmek için bir plan oluşturması gerekir (Montague ve Applegate, 2000). Problem çözmenin daha ileri bir seviyesi olan matematiksel ispat (Mamona-Downs ve Downs, 2005) ise çeşitli olgular hakkında içgörü geliştirme ve düşünceleri ifade etme olanağı sunar (NCTM, 2000). İspat yapma ile problem çözme arasındaki temel fark; ispatta bir argümanın kesin bir dille ifade edilmesi için bazı kurallara uyulması ve ispatın bir düzen içinde sunulması gerektiğidir, oysa problem çözmede böyle bir durum yoktur (Mamona-Downs ve Downs, 2005). Ayrıca problem çözmede, apaçık görünen olguların (aşikâr durumların) kabul edilmesine izin verilirken; ispat yapmada doğrulamanın resmî olarak kabul edilen matematiksel dilde ifade edilmesi gerekmektedir (Mamona-Downs ve Downs, 2013).

Problem çözme ve ispat yapma süreçlerinin her ikisi de belirli aşamalardan oluşan süreçlerdir. Polya'ya (1945) göre problem çözme süreci; problemi anlama, çözüm için plan hazırlama, planı uygulama ve değerlendirme olarak dört aşamadan oluşmaktadır. Öncelikle problem anlaşılmalı, ikinci olarak çeşitli öğelerin nasıl bağlantılı olduğu ve bilinmeyenin verilenlerle nasıl bağlantılı olduğu görülerek bir plan yapılmalı, ardından bu plan gerçekleştirilmeli ve son olarak tamamlanmış çözüm gözden geçirilerek tartışılmalıdır. Nadir durumlarda bir öğrencinin aklına son derece parlak bir fikir gelebilir ve tüm aşamaları atlayarak doğrudan çözüme ulaşabilir. Ancak böyle bir durum olmaksızın bu aşamaların herhangi biri atlanırsa süreç başarısızlıkla sonuçlanabileceği için aşamaların her biri ayrı bir öneme sahiptir (Polya, 1945).

İspatın yapısını altı aşamada ele alan Boero'ya (1999) göre bu aşamalar; varsayımın üretilmesi, ifadenin formüle edilmesi, varsayımın içeriğinin araştırılması, argümanların seçilerek tümdengelimli bir zincir hâlinde sıralanması, mevcut matematiksel standartlara göre argümanların düzenlenmesi ve formal bir ispata yaklaşmadır.

Yeşilyurt-Çetin ve Dikici'ye (2021) göre ispat yapma süreci hipotezi belirleme, hükmü belirleme, kullanılacak ispat yöntemini belirleme, işlem basamakları (hipotezi kullanma; tanım, özellik, kavramsal bilgileri seçip kullanma; önceki bilgileri kullanma ve işlem yapma) ve ispatı tamamlama olmak üzere beş aşamadan oluşmaktadır. Bir ispatta bu basamakların herbirinin yer alması zorunlu değildir. İspat yapılırken öncelikle varsayım belirlenir (hipotezi belirleme), ardından bu varsayımdan yola çıkılarak yargı oluşturulur (hükmü belirleme) ve uygun ispat yöntemine karar verilir (ispat yöntemini belirleme). İspat yapma sürecinde tanımlardan (tanım kullanma), ispat öncesinde bilinmesi gereken yardımcı bir teoremden ya da ispat sürecinde ulaşılan bir bilgiden (önceki bilgiler) faydalanmak gerekebilir. Ayrıca matematiksel kavramlar ve bunlara yönelik bilgilerin hangilerinin kullanılacağına karar vermek (kavramsal bilgileri seçip kullanma), süreç içerisinde oluşturulan hipotezin kullanımı gerekmişse bu hipotezi kullanmak (hipotezi kullanma), matematiksel bir özelliği kullanmak (özellik kullanma) ve çeşitli cebirsel işlemler yapmak (işlem yapma) da gerekebilir. Son olarak ispat yapma sürecinde ulaşılan bütün bilgileri bir düzen çerçevesinde ele alarak gerekli çıkarımın yapılması ve ispatın sonlandırılması gerekmektedir (ispatı tamamlama) (Yeşilyurt-Çetin ve Dikici, 2021). Her iki ispat aşamalandırmasında (Boero, 1999 ve Yeşilyurt-Çetin ve Dikici, 2021) da bu basamaklar zorunlu ve hiyerarşik olmak zorunda değildir. İspatın yapısına göre aşamaların varlığı ve sırası değişkenlik gösterebilir.

Görüldüğü gibi hem matematiksel ispat yapma süreci hem de problem çözme süreci yoğun bir zihinsel aktiviteyi ve düşünceleri analiz ederek ilerlemeyi gerektirir. Her iki süreçte de birey ya önceki düşüncesini teyit eder ve bir sonraki düşünceyi inşa ederek ilerler ya da önceki düşüncesini yanlışlayarak yeni bir argüman oluşturup bu argüman üzerine düşünerek ilerler. Bu yoğun zihinsel süreçlerin hem öğretici tarafından hem de bireyin kendisi tarafından daha iyi anlaşılabilmesi için düşüncelerin sözlere dökülmesi gerekebilir.

Sesli Düşünme

Sesli düşünme yönteminde amaç; bir etkinlik sırasında ortaya çıkan zihinsel işlem, süreç ve düşünceleri ortaya çıkarmaktır. Bu yöntem öğrencinin sorgulama, sorun çözme, karar verme, eleştirel düşünme gibi zihinsel becerilerini geliştirmek amacıyla da kullanılır (Güneş, 2012). Problem çözme ve matematiksel ispat yapmada sesli düşünme yöntemi uygulanırken; bireyden denediği ya da uyguladığı yöntem ve tekniklerle süreç içerisindeki düşüncelerini sesli olarak ifade etmesi istenmektedir. Hem problem çözme hem de matematiksel ispat yapma birden fazla düşünme süreç ve aşamasını içinde barındıran karmaşık süreçlerdir. Bu nedenle bireyin problem çözerken ya da ispat yaparken ne düşündüğünü, neyi neden yaptığını, hangi bilgileri kullandığını iyi tespit etmek gerekmektedir. Bunun için de bir sözelleştirme işlemine ihtiyaç duyulmaktadır. Güneş'in (2012) aktarımına göre Gérard Scallon, sesli düşünmenin bir sözelleştirme işlemi olduğunu ve problem çözme süreçlerini kolaylaştırdığını, problem çözme sırasında bireylerin düşündüklerini yüksek sesle söylemelerinin hem çözüm sürecine hem de doğru sonuca ulaşmaya katkı sağladığını ayrıca öğrencilerin bu süreçte izledikleri yol ve yöntemlerin açıklığa kavuşmasına yardım ettiğini belirtmektedir.

Düşünme sürecini olumsuz etkilemeyen bir yöntem olan sesli düşünmede birey düşüncelerini yorumlamaz ve düşüncelerini belirli bir forma getirmez, o an aklına geldiği şekilde konuşur (van Someren, Barnard ve Sandberg, 1994). Öğrencilerin problem çözerken geliştirdikleri stratejileri farklı problemlere ve farklı durumlara da uygulayabilmeleri için problem çözme süreci sırasındaki düşünceleri üzerine de düşünmeye teşvik edilmelidirler (NCTM, 2000). Öğrenciler problem çözme sürecinde yüksek sesle düşünürken kendi zihinsel süreçlerine odaklanırlar ve kendi düşünceleri üzerine düşünmeye başlarlar. Neyi, neden yaptıklarına yönelik bir öz biliş ve öz farkındalık geliştirirler. Sesli düşünme pratikleri arttıkça doğal olarak bu öz biliş ve öz farkındalık düzeyi de artar. Dolayısıyla öğrenciler sesli düşünme yöntemini kullandıkça problem çözme ve ispat yapma süreçlerinde kendi zihinsel ve bilişsel süreçlerinin farkına varırlar ve bilinçli bir biçimde süreçlerini ilerletirler.

Öğrenme sürecinde çoğu zaman nerede hata yapıldığı bilinmeden ilerlendiği için mevcut hatalar yeni yanlış öğrenmeleri de beraberinde getirmekte ve sonuçta öğrenci, içinden çıkılamaz bir eksik/yanlış bilgi ağının içinde kaybolma tehlikesiyle karşı karşıya kalmaktadır. Problem çözme ve ispat yapma sürecinde neyi neden yaptığının farkında olan ve nasıl düşündüğüne yönelik bir fikir geliştirebilen öğrenci ise doğru bilgilerini pekiştirebilme ve yanlış öğrenmelerini de düzeltme imkânına sahip olacaktır. Dolayısıyla öğretim sürecine sesli düşünme yöntemi dâhil edilerek öğrencilerin problem çözme ve ispat yapma süreçlerindeki hatalarının ve zihinsel süreçlerinin açığa çıkarılabileceği ve böylelikle sürecin daha etkili bir şekilde yapılandırılabileceği düşünülmektedir. Bu bağlamda da MÖA'nın problem çözme ve ispat yapma süreçlerinin sesli düşünme yöntemi ile incelenmesi, zihinsel süreçlerinin açığa çıkarılması ve yapılan hataların MÖA tarafından farkedilmesi gerekmektedir. Bu gereklilik bağlamında bu araştırma ile MÖA'nın problem çözme ve ispat yapma süreçlerinin sesli düşünme yöntemi ile incelenmesinin ve zihinsel süreçlerinin açığa çıkarılmasının yanı sıra sesli düşünme süreci hakkındaki görüşlerinin tespit edilmesi amaçlanmıştır.

Alanyazında problem çözme süreçlerinin sesli düşünme yöntemi ile incelendiği çalışmaların (Özkubat ve Özmen, 2017; Rosenzweig, Krawec ve Montague, 2011; Deshpande, Riccomini, Hughes ve Raulston, 2021) yanı sıra matematiksel ispat yapma süreçlerinin sesli düşünme yöntemi ile incelendiği çalışmalara da (Öztürk, 2021; Öztürk ve Kaplan, 2022; Yeşilyurt-Çetin ve Dikici, 2020, Yeşilyurt-Çetin, 2017) rastlanılmıştır. Ancak hem problem çözme hem de matematiksel ispat yapma süreçlerinin sesli düşünme yöntemi esas alınarak incelendiği bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Ayrıca uygulama sürecine katılan ve dolayısıyla sesli düşünme süreci hakkında deneyim kazanmış olan MÖA'nın görüşlerine de yer verilmiştir. Tüm bunlar göz önüne alındığında bu araştırma alanyazında özgün bir yere sahiptir.

Bu araştırma kapsamında aşağıdaki araştırma sorularına cevap aranmıştır.

1. MÖA'nın matematiksel ispat yaparken ve problem çözerken zihinsel süreçleri nasıl ilerlemektedir?
2. MÖA'nın sesli düşünme yöntemine ilişkin görüşleri nasıldır?

Yöntem

Bu araştırmada nitel araştırma yöntemi esas alınmış ve durum çalışması deseninden faydalanılmıştır. Araştırmacının üzerinde çok az kontrole sahip olduğu eş zamanlı durumların "nasıl" ve "neden" soruları sorularak incelenmesi olan durum çalışmalarında gerçek hayattaki bir olgunun derinlemesine incelenmesi amaçlanır (Yin, 2009). Bu araştırmada; MÖA'nın problem çözme ve ispat yapma durumlarına odaklanılmış, araştırma sonucunda sesli düşünme yöntemi yardımıyla elde edilen bulgular zengin bir şekilde betimlenmiştir. Araştırma kapsamında MÖA'nın problem çözme ve ispat yapma durumlarının nasıl ilerlediği ile bu süreçteki doğru ve yanlışlarının olası nedenleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Katılımcılar

Bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği bölümü 2. sınıf öğrencilerinden soyut cebir ve sayılar teorisi derslerinde, ders içerisinde yöneltilen problemleri sözle ifade ederek ve matematiksel ifadeleri kullanarak çözüme ulaşan ve birinci araştırmacı ile sorunsuz iletişim kurabilen öğrencilerden gönüllülük esasıyla seçilen 4 MÖA araştırmanın katılımcılarını oluşturmaktadır. Katılımcıların araştırmacı ile sorunsuz iletişim kurabilmesi, problem çözme ve ispat yapma süreçlerinde düşüncelerini çekinmeden ifade edebilmeleri ve sesli düşünme yönteminin etkili bir biçimde kullanılabilmesi açısından önemlidir. Birinci araştırmacı katılımcıların danışmanlığını yürütmesi sebebiyle öğrenim sürecinde katılımcılarla sürekli iletişim hâlinde olmuş ve dolayısıyla sesli düşünme sürecinde katılımcılarla sorunsuz iletişim kurulabilmiştir. Buna ek olarak sesli düşünme süreçlerinde katılımcıların çekinmeden kendilerini ifade edebilecekleri bir ortam oluşmuştur.

Veri Toplama Aracı

Bu araştırmada iki matematiksel problemin çözüm süreci ve iki teoremin ispat süreci incelenmiştir. Uygulamada kullanılacak teoremler belirlenirken 2. sınıf müfredatına ait soyut cebir ve sayılar teorisi-I dersi esas alınmış, öğretmen adaylarının bu derse yönelik temel bilgilerini kullanarak ispatlayabilecekleri iki teorem seçilmiştir. Üniversite düzeyinde matematik ve matematik eğitiminin en önemli derslerinden biri olan soyut cebir, ispat gerektiren tanım ve teoremlerle doludur (Agustyaningrum, Husna, Hanggara, Abadi ve Mahmudi, 2020; Yeşilyurt-Çetin ve Dikici, 2021). Bu araştırmada da veriler ikinci araştırmacının yürütücüsü olduğu soyut cebir ve sayılar teorisi dersi kapsamında toplanmıştır. Bu sebeple uygulamada hangi teorem ispatlarının ve problemlerin kullanılacağına araştırmanın amacına uygun olarak ve katılımcıların aldıkları cebir dersleri göz önünde bulundurularak araştırmacılar tarafından görüş birliği ile karar verilmiştir. Kullanılan teoremlerin ve problemlerin ezbere dayalı olmaksızın muhakeme yapılarak çözülebilecek olmasına özen gösterilmiştir. Teoremler, ezbere dayanmaksızın ispatı yapılabilecek, grup kavramına yönelik temel teoremlerden seçilmiştir. Problemlerden her ikisi de ezbere dayalı olmayan problemlerden seçilmiş olmakla beraber 3. problem birden fazla çözüm yolu içerdiği, 4. problem ise muhakeme etmeyi gerektirdiği için uygulamaya dâhil edilmiştir. Uygulamada kullanılan teorem ve problemler şunlardır:

1. “G bir grup ve $\forall\, a, b \in G$ için $(ab)^2 = a^2b^2$ ise G değişmelidir. Gösteriniz.”

2. “$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n\mathbb{Z} = \{na\colon a \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $\mathbb{Z}$ nin bir alt grubudur. Gösteriniz.”

3. Bir depoda bulunan 44 litre su 4, 5 ve 6 litrelik üç kapla, kaplar tam doldurulmak koşuluyla başka bir depoya aktarılacaktır. Her kap en az bir kez kullanılmak koşuluyla bu suyun tamamı en az kaç kapla aktarılabilir?

4. $A = \{a, b, c, 1,2,3,4\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde rakam sayısı harf sayısından fazladır?

Uygulama Süreci

Uygulamada kullanılacak teorem ve problemlere MÖA’nın eğitim süreçleri göz önünde bulundurularak karar verilmiştir. Tüm uygulamalar sesli düşünme yönteminde deneyim kazanmış olan birinci araştırmacı tarafından özel bir odada her bir katılımcıyla ayrı ayrı yapılmıştır. Uygulama öncesinde her bir katılımcıya ayrı ayrı sesli düşünmenin ne olduğu, düşüncelerini sesli olarak nasıl ifade edebilecekleri anlatılmış ve örneklendirilmiştir. Ayrıca bu uygulamada problemi çözerken ve ispatı yaparken ne düşündüklerinin dolayısıyla da problemi çözme ve ispatı yapma süreçlerinin açığa çıkarılmasının amaçlandığı bilgisi verilmiştir. Uygulama sırasında katılımcıların sesli düşünme sürecinden kopmasını engellemek, düşünceleri hakkında daha fazla konuşmasını sağlamak ya da araştırma için daha fazla veri üretimini sağlamak amacıyla araştırmacı, katılımcılara ‘Ne düşünüyorsun? ve Neden … yaptın?’ gibi çeşitli sorular yöneltmiştir. Öğretmen adayları bu uygulamalarla hem sesli düşünme yöntemi ile tanışmış hem de bu yöntemle ilgili bir deneyim kazanmışlardır. Dolayısıyla uygulama sonunda da öğretmen adaylarının sesli düşünme yöntemi ile ilgili görüşleri alınmıştır.

Verilerin Analizi

Öğretmen adaylarının çözüm süreçleri video ile kayıt altına alınmıştır. Videoların transkript edilmesiyle elde edilen bulgular betimsel analiz yöntemi ile analiz edilerek yorumlanmıştır. Betimsel analizde “bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya sunmak” amacıyla veriler, açık bir biçimde betimlenerek yorumlanır, “neden-sonuç ilişkileri irdelenir ve birtakım sonuçlara ulaşılır” (Yıldırım ve Şimşek, 2008: 224). Bu araştırmanın bulguları da öğretmen adaylarının düşünme süreçleri esas alınarak soru soru düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya sunulmuş ve elde edilen veriler, açık bir biçimde betimlenerek neden-sonuç ilişkileri ortaya çıkarılmış ve birtakım sonuçlara ulaşılmıştır.

Öğretmen adaylarının sesli düşünme süreçleri ve yaptıkları işlemler birlikte ele alınarak analiz edilmiştir. Verilerin analizinde Polya’nın (1945) problem çözme adımları ve Yeşilyurt-Çetin ve Dikici’nin (2021) ispat yapma sürecine yönelik temel bileşenleri esas alınmıştır. Problem çözme adımlarının her biri ayrı öneme sahiptir ve bu adımlardan herhangi birinin atlanması çözümde başarısızlığa sebep olabilir (Polya, 1945). Ancak ispat sürecine yönelik aşamalar zorunlu olmamakla birlikte hiyerarşik ya da sıralı bir düzene sahip değillerdir, ispatın yapısına göre kullanılan bileşen ya da aşama değişebilmektedir (Yeşilyurt-Çetin ve Dikici, 2021; Boero, 1999). Bu araştırma kapsamında ele alınan teoremlerden 1. teoremin ispatında hipotezi ve hükmü belirleme, hipotezi kullanma, işlem yapma, özellik kullanma, kavramsal bilgileri seçip kullanma ve ispatı tamamlama bileşenleri varken; 2. teoremin ispatında ise hipotezi ve hükmü belirleme, tanım kullanma, önceki bilgileri kullanma, işlem yapma ve ispatı tamamlama bileşenleri vardır.

MÖA’nın sesli düşünme yöntemine ilişkin görüşleri de bütüncül bir yaklaşımla okuyucuya doğrudan aktarılmış ve oluşan kodlar Çizelge 1’de sunulmuştur.

Geçerlik ve Güvenirlik

Bu araştırma kapsamında sesli düşünme yöntemi yardımı ile veriler derinlik odaklı toplanmış; inandırıcılığı sağlayabilmek için elde edilen sonuçlar birbirleriyle karşılaştırılarak yorumlanmış ve doğrudan alıntılar ile okuyucuya aktarılmıştır. Ayrıca uygulama öncesinde birinci araştırmacının katılımcılarla uzun süreli etkileşimi söz konusudur. Uygulama sırasında ise sorular katılımcılara benzer yaklaşımlarla yöneltilmiş, verilen cevaplar video ile dijital ortamda kaydedilerek nesnellik sağlanmıştır. Çalışmada katılımcıların belirlenmesi ve veri toplama süreci betimlenerek bütünlük içerisinde okuyucuya sunulmuştur.

Bu araştırmada öğretmen adayları için takma isimler kullanılmıştır. Uygulamaya katılan MÖA'ya uygulamaya başlamadan önce; katılımın isteğe bağlı olduğu, kişisel bilgilerinin korunacağı ve uygulamaya katılmaktan vazgeçmeleri durumunda herhangi bir olumsuzluk yaşamayacakları bilgisi verilmiştir.

Araştırmada elde edilen veriler farklı zaman aralıklarıyla üç kez analiz edilmiş ve verilerin analizinde araştırmacılar ortak çalışmışlardır. Ayrıca verilerin analizinde iki farklı uzmandan da görüş alınmıştır.

Araştırmanın Etik İzinleri

Yapılan bu çalışmada "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Yönergenin ikinci bölümü olan "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

Etik kurul izin bilgileri:

Etik değerlendirmeyi yapan kurul adı: Atatürk Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Etik Kurulu

Etik değerlendirme kararının tarihi: 31.12.2020

Etik değerlendirme belgesi toplantı sayısı/karar no: 15/21.

Bulgular

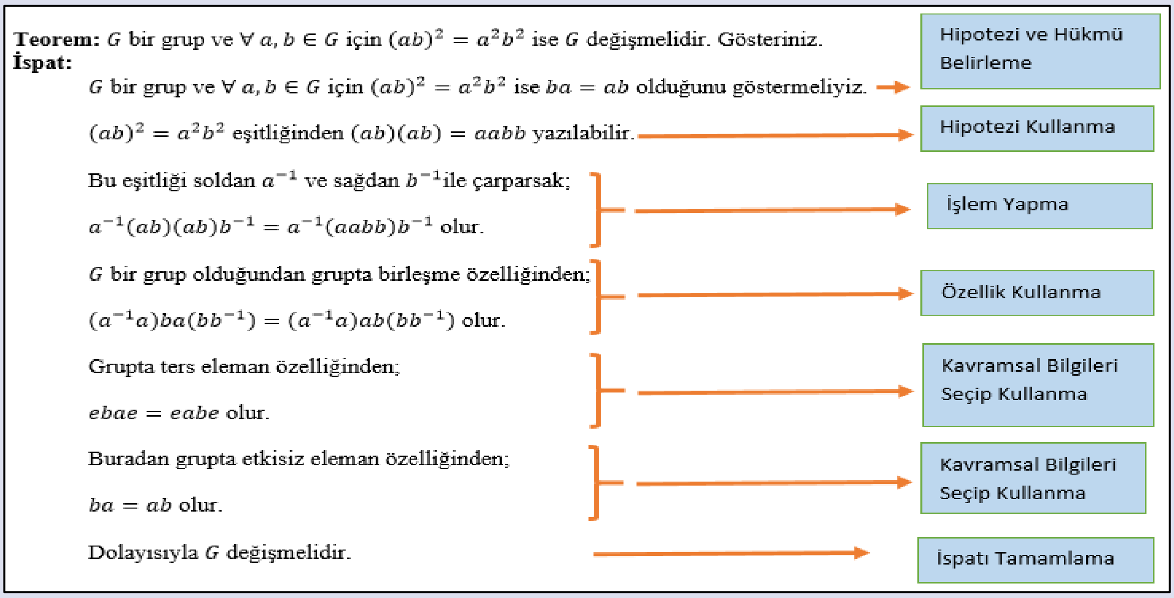
Bu başlık altında MÖA'nın matematiksel ispat yapma ve problem çözme süreçlerine ve sesli düşünme yöntemi hakkındaki görüşlerine yönelik bulgulara ve yorumlara yer verilmiştir. Sesli düşünme yönteminde veri yoğunluğu fazla olduğu için bir matematiksel ispatın ve bir problemin analizi detaylı olarak sunulmuş diğerleri için ise çözüm örneklerine yer verilmiştir.

MÖA'nın Matematiksel İspat Yapma ve Problem Çözme Süreçlerine Yönelik Bulgular ve Yorumlar

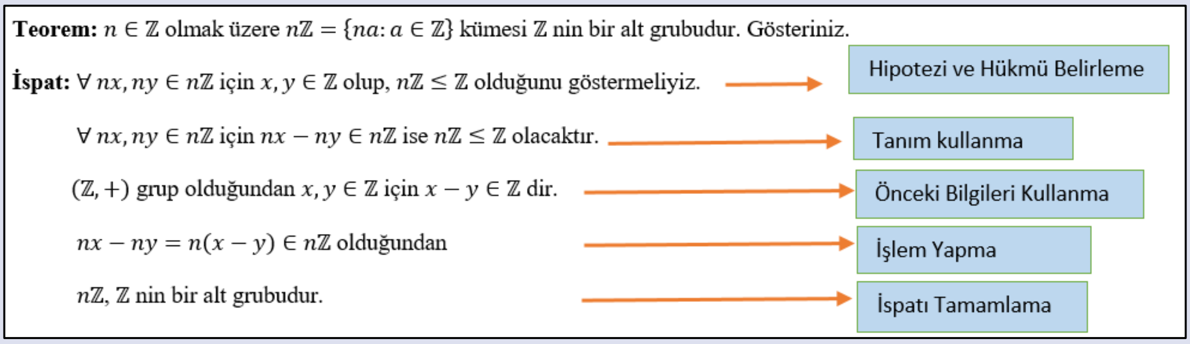
MÖA'nın matematiksel ispat yapma ve problem çözme süreçlerini inceleyebilmek ve bu süreçteki düşüncelerini, varsa yanlış ve eksik öğrenmelerini açığa çıkarabilmek için sesli düşünme yöntemi aracılığıyla elde edilen bulgular bu başlık altında sunulmuştur.

Problem çözme sürecinde MÖA'nın problemi anlamaları, çözüm için bir plan geliştirmeleri, planı uygulamaları ve çözümü değerlendirmeleri beklenirken; ispat yapma sürecinde Resim 1 ve Resim 2'de sunulan bileşenleri/aşamaları yerine getirerek ispatları tamamlamaları beklenmiştir.

Resim 1'de görüldüğü gibi birinci teoremin ispatında hipotez ve hüküm belirlenerek ispata başlanır. Hipotezden yola çıkılarak işlemler yapılır ve grupta birleşme özelliği kullanılır. Ardından ters eleman ve etkisiz eleman kavramlarına yönelik bilgiler de kullanılarak hükme varılır ve gerekli çıkarım yapılarak ispat tamamlanır.



Resim 1. Birinci teoremin ispatı ve bileşenlerine ayrılması



Resim 2. İkinci teoremin ispatı ve bileşenlerine ayrılması

Resim 2'de ise ikinci teoremin ispat sürecine yönelik bileşenler görülmektedir. Burada ise hipotez ve hüküm belirlendikten sonra alt grup tanımı, grup olma şartları ve grup işlemine yönelik önceki bilgiler kullanılarak işlemler yapılır ve ispat tamamlanır. Burada "$\forall\, nx, ny \in n\mathbb{Z}$ için $nx - ny \in n\mathbb{Z}$ ise $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ olacaktır." basamağı, alt grup olma özelliğini ifade eden gerek ve yeter şartlı bir teorem olduğu için tanım (alt grup tanımı) kullanma bileşeni olarak ele alınmıştır.

1. Teoremin ispatına yönelik bulgular.

Öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde, Ayda ve Beste değişmeli olma şartını matematiksel olarak formal bir biçimde ifade edebilmiş, hipotezi ve hükmü belirleyebilmiş, grup özelliklerini ifade etmeden ters eleman ve etkisiz eleman özelliklerine yönelik kavramsal bilgileri kullanarak ispatı tamamlamışlardır. Beste, "*[yazdığı eşitlikteki $b^{-1}.b$ yi göstererek] b nin tersi ile çarparım ki buradan b ler birim eleman olsun.*" diyerek grupta ters eleman özelliğini sözlü olarak ifade etmiştir ancak formal bir düzende yazmamıştır. Bu durum Beste'nin grup özelliklerini bildiği ve kullanabildiği ancak formal matematiksel yazıma uygun biçimde yazma gereği duymadığı şeklinde yorumlanmıştır. Benzer olarak Ayda da "*Tersiyle çarpıcam [Eşitliğin her iki yanına da '$.b^{-1}$' ve alt satıra da '$aba = a^2b$' yazdı.] olucak. Eee sonra şu tarafları [yazdığı ikinci eşitliğin her iki yanının solunu göstererek] a nın tersi ile çarpıcam. Bunlar [a ları göstererek] gitsin diye [Eşitliğin her iki yanına soldan 'a^{-1}' yazdı.]*" ifadelerinden anlaşılacağı üzere birim eleman ve ters elemana yönelik kavramsal bilgilere sahip olmasına rağmen sözlü olarak ifade etmemiş ve formal bir biçimde yazma gereği duymamıştır. Ayda'nın tersine Beste ispatı tamamlama bileşenine yönelik ifadeyi yazmıştır. Arzu hipotezden yola çıkarak ve ters elemana yönelik kavramsal bilgileri seçip kullanarak işlemlere başlamış, "$(ab)(ab)b^{-1} = a^2b^2b^{-1}$" buradan "$aba =$" yazmış olmasına rağmen işlemlerini ilerletememiş, değişme özelliğinin ne olduğunu ifade etmemiş ve ispatı yapamamıştır. Banu ise Arzu'nun aksine değişme özelliğini matematiksel olarak ifade etmiş ancak etkisiz eleman ve ters elemana yönelik kavramsal bilgileri seçip kullanamadığı için ispatı yapamamıştır. Teorem ifadesinden hipotezi ve hükmü çıkarsayamayan Banu, *"$(ab)^2 = a^2b^2$[yazarak] ab nin parantez karesi a kare b kare olduğunu göstereceğiz."* diyerek ispata başlamıştır. Dolayısıyla hangi kabulle neyi göstermesi gerektiğini anlamamış olduğu görülmüştür. Banu'nun işlemlerini yaparken "*Eğer grupsa parantezleri kaldırabiliriz.*" ifadesi, birleşme özelliğinin grup olma şartı olduğunu bildiğini gösterse de işlemlerini ilerletememiştir. Sesli düşünmeye devam ettikçe aslında ne yapması gerektiğini kısmen de olsa anlayan Banu'nun sesli düşünme sürecinin bir bölümü şu şekilde ilerlemiştir: *"Şu eşitlikten [yazdığı '$abab = a^2b^2$' eşitliğinin sağ tarafını göstererek] ben direk burayı [teorem ifadesinde yazan 'G değişmelidir.' i göstererek] bulmayacak mıyım zaten? (…) Ay tamam ya şimdi anladım. Bunu da a çarpı a b çarpı b yazalım [Yazdığı '$abab = a^2b^2$' eşitliğindeki a^2b^2'nin altına '$aabb$' yazdı.] (…) ['$abab = aabb$' yazdı.]. Şuradan ['$abab = aabb$' eşitliğindeki '$abab$' deki 'ba' yı göstererek] ben bunu a çarpı a b çarpı b yazmam için ['$aabb = aab$' yazdı.] Şu ['$abab = aabb$' eşitliğindeki '$abab$' deki 'ba' yı göstererek] ba nın ab ye eşit olması gerekir. Buradan da değişmeli olduğu gözükür zaten."* Görüldüğü gibi Banu, son adımda hipotezi kullanabilmiş ve '$abab = aabb$' yazmış olsa da neyi kabul ederek neyi göstereceğini bilemediğinden yani hipotezi ve hükmü belirleyemediğinden ve devamında da kavramsal bilgileri seçip kullanamadığından ispatı yapamamıştır. Öğretmen adaylarının sesli düşünme süreçleri incelendiğinde grup özelliklerini bilseler bile bu özellikleri nasıl kullanacaklarını bilmedikleri görülmüştür. Yani MÖA kavramsal bilgileri seçip kullanmada sorun yaşamıştır.

Öğretmen adaylarının ispatlaması beklenen 1. teoremin ispatı ile Ayda'nın ispat yapma ve sesli düşünme süreci aşağıdaki gibidir:

Teorem: G bir grup ve $\forall\, a, b \in G$ için $(ab)^2 = a^2b^2$ ise G değişmelidir. Gösteriniz.
İspat:

G bir grup ve $\forall\, a, b \in G$ için $(ab)^2 = a^2b^2$ ise $ba = ab$ olduğunu göstermeliyiz.

$(ab)^2 = a^2b^2$ eşitliğinden $(ab)(ab) = aabb$ yazılabilir. Bu eşitliği soldan a^{-1} ve sağdan b^{-1}ile çarparsak;

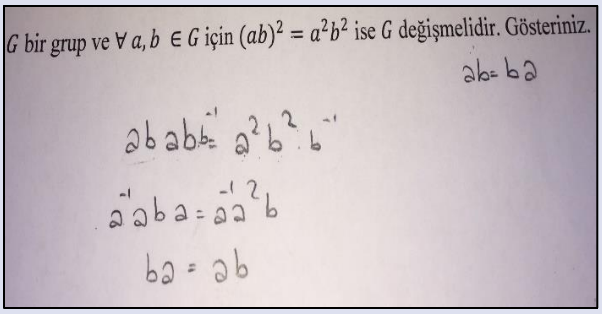
$a^{-1}(ab)(ab)b^{-1} = a^{-1}(aabb)b^{-1}$ olur. G bir grup olduğundan grupta birleşme özelliğinden;

$(a^{-1}a)ba(bb^{-1}) = (a^{-1}a)ab(bb^{-1})$ olur. Grupta ters eleman özelliğinden;

$ebae = eabe$ olur. Buradan grupta etkisiz eleman özelliğinden;

$ba = ab$ olur.

Dolayısıyla G değişmelidir.



Resim 3. Birinci teoremin ispatı ve Ayda'nın yaptığı ispat

Ayda: *Önce bunu [Teorem ifadesinde geçen $(ab)^2$'yi göstererek] açıyorum. [$abab = a^2b^2$yazdı.] Sonra hani bu tarafta [Eşitliğin sağ tarafını göstererek] a kare b kare var ya burada da [Eşitliğin sol tarafını göstererek] sadece şurayı [yazdığı '$abab$'deki ilk 'ab'yi göstererek] elde edebilmek için şurayı [yazdığı '$abab$'deki ikinci 'ab'yi göstererek] yok etmeye çalışıcam. Tersiyle çarpıcam [Eşitliğin her iki yanına da '$.b^{-1}$' yazdı.] [Alt satıra '$aba = a^2b$' yazdı.] olucak. Eee sonra şu tarafları [yazdığı ikinci eşitliğin her iki yanının solunu göstererek] a nın tersi ile çarpıcam. Bunlar [a ları göstererek] gitsin diye [Eşitliğin her iki yanına soldan 'a^{-1}' yazdı.]…*

Araştırmacı: *Neden onları gönderiyorsun?*

Ayda: Eee *elimde burada [ilk yazdığı '$abab = a^2b^2$' eşitliğinde sol tarafı göstererek] ab; burada [ilk yazdığı '$abab = a^2b^2$' eşitliğinde sağ tarafı göstererek] ba kalabilmesi için önce bu tarafı [eşitliğin sol tarafının sonunu göstererek] yok ediyorum sonra burdan bu tarafı [eşitliğin sağ tarafını göstererek] yok etmeye çalışıyorum.*

Araştırmacı: *Neden orada ab orada ba kalacak?*

Ayda: *Değişmeli olduğu için [teoremdeki 'G değişmelidir' ifadesini göstererek], değişmeli ab=ba olduğu için [Teoremde gösterdiği ifadenin altına '$ab = ba$' yazdı.]. Burada ['$a^{-1}aba = a^{-1}a^2b$' eşitliğinin sol tarafını göstererek] ba kaldı. Burada da ['$a^{-1}aba = a^{-1}a^2b$' eşitliğinin sağ tarafını göstererek] ab kalır. ['$ba = ab$' yazdı.] Bu şekilde de gösterilmiş olur.*

Görüldüğü gibi Ayda, hipotezi ve hükmü belirtmese de "*Elimde burada [ilk yazdığı '$abab = a^2b^2$' eşitliğinde sol tarafı göstererek] ab; burada [ilk yazdığı '$abab = a^2b^2$' eşitliğinde sağ tarafı göstererek] ba kalabilmesi için önce bu tarafı [eşitliğin sol tarafının sonunu göstererek] yok ediyorum sonra burdan bu tarafı [eşitliğin sağ tarafını göstererek] yok etmeye çalışıyorum."* ifadelerinden de anlaşıldığı üzere hipotezi ve hükmü aslında zihninde belirleyerek ve hipotezi kullanarak ispata başlamıştır. Birim eleman ve ters elemana yönelik kavramsal bilgileri seçip kullanabilmiş ve ispata yönelik işlemleri yaparak kabul edilebilir bir düzeyde ispatı tamamlamıştır. Ancak ispatı tamamlamaya yönelik ifadeyi yazmaya gerek duymamıştır. Değişmeli olma şartını ifade etmiş, ancak grupta birleşme, etkisiz eleman ve ters eleman özelliklerini sözlü olarak tam bir biçimde ifade etmemesine rağmen bu özelliklere yönelik kavramsal bilgileri kullanarak işlemleri yapmış ve dolayısıyla eksik bir formal matematiksel yazımla da olsa ispatı tamamlamıştır.

2. Teoremin ispatına yönelik bulgular.

İspat yapma süreçleri incelendiğinde, öğretmen adaylarının hipotezi ve hükmü formal bir biçimde yazamadıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarından Arzu'nun önceki bilgilerini hatırlama çabasına rağmen ispata yönelik herhangi bir fikir üretemediği ve teoremi ispatlayamadığı görülmüştür. Beste, Ayda ve Banu'nun alt grup tanımını (alt kümenin grup olma koşullarını sağlaması) bilmelerine ve uygulayabilmelerine rağmen $\mathbb{Z}$ nin (tam sayıların) hangi işlem altında bir grup olduğunu ve bu işlemin alt grupta da korunması gerektiğini bilmemelerinden ötürü ispatı doğru bir biçimde yapamadıkları gözlenmiştir. Burada öğretmen adaylarının $(\mathbb{Z}, +)$'nın grup olduğu ancak $(\mathbb{Z}, .)$'nın bir grup olmadığı temel bilgisinden yoksun oldukları görülmüştür. Beste, Ayda ve Banu her ne kadar elemanları doğru temsillerle göstermiş olsalar bile grup işlemine yönelik bilgi [$(\mathbb{Z}, +)$'nın grup olduğu ve grup işleminin alt grupta da korunması gerektiği bilgisi: önceki bilgileri kullanma bileşeni] eksiklikleri sebebiyle ispatı yapmakta başarısız olmuşlardır.

Öğretmen adaylarının ispatlaması beklenen 2. teoremin ispatı ile Banu'nun ispat yapma ve sesli düşünme sürecine yönelik bulgu ve yorumlar aşağıdaki gibidir:

Teorem: $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n\mathbb{Z} = \{na : a \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $\mathbb{Z}$ nin bir alt grubudur. Gösteriniz.

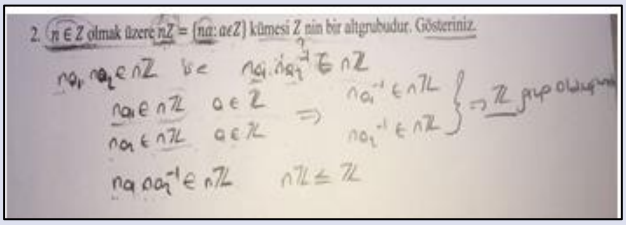
İspat: $\forall\, nx, ny \in n\mathbb{Z}$ için $x, y \in \mathbb{Z}$ olup, $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ olduğunu göstermeliyiz.

$\forall\, nx, ny \in n\mathbb{Z}$ için $nx - ny \in n\mathbb{Z}$ ise $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ olacaktır.

$(\mathbb{Z}, +)$ grup olduğundan $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x - y \in \mathbb{Z}$ dir.

$nx - ny = n(x - y) \in n\mathbb{Z}$ olduğundan

$n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin bir alt grubudur.



Resim 4. İkinci teoremin ispatı ve Banu'nun yaptığı ispat

Banu, '$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ *ise* $n_1.n_2^{-1} \in \mathbb{Z}$' yazarak ispata başlamıştır. Yazdığı bu ifadeden ve "n_1 *lerimiz şu tip [teorem ifadesindeki 'na' ları göstererek] elemanlar olacak.*" ifadesinden elemanların nasıl olması gerektiğini ve alt grup olma özelliğini (tanımını) bildiği düşünülmüştür. Araştırmacının "*Neyin alt grup olduğunu göstereceğiz?*" sorusu üzerine teoremin ifadesini tekrar okumuş ve "*Şu şey pardon kümemiz, elemanları $n\mathbb{Z}$ den seçicez.*" diyerek elemanları $n\mathbb{Z}$ den seçmiştir. Elemanları neden önce $\mathbb{Z}$ den seçtiği sorulduğunda ise " *Ee ya ilk başta (…) $\mathbb{Z}$ nin bir alt grup olduğunu anladığım için direk n şeklinde elemanları seçtim. (...) Ama bana $n\mathbb{Z}$ yi alt grup olduğunu göster ee sorduğu için (…) $n\mathbb{Z}$ nin eleman ee tipleri de yani na şeklinde…*" cevabını vermiştir. Bu durumda Banu'nun elemanların nasıl olması gerektiğini bildiği ancak dikkatsiz davrandığı ve teorem ifadesini anlamadığı için başlangıçta yanlış yaptığı sonucuna varılmıştır. "*Şimdi eee mesela burda şey yapmış ya hani bunun [teorem ifadesindeki $n\mathbb{Z}$ yi göstererek] alt grup olduğunu göstericem ya, şimdi elemanın burda bi elemanın bi de diğer elemanın tersi varsa [yazmış olduğu '$na_1.na_2^{-1} \in n\mathbb{Z}$' ifadesini göstererek] zaten alt grup oluyor ama bana burda mesela bir gruptur şeklinde bir ifade vermemiş. Yani $\mathbb{Z}$ bi, $\mathbb{Z}$ aslında bir grup evet doğru [gülerek] onu söylemeye gerek yok.*" ve "*['$na_1^{-1} \in n\mathbb{Z}$ ve $na_2^{-1} \in n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ grup olduğundan' yazarak] na_1 çarpı na_2 nin tersi de $n\mathbb{Z}$ nin elamanı olmuş oluyor.*" ifadelerinden de anlaşılacağı üzere tamsayıların grup olduğunu ifade eden Banu, tamsayıların hangi işlem altında bir grup olduğu bilgisine sahip değildir. Ayrıca Banu, alt grup tanımını bilmesine rağmen grup işlemini ve bu işlemin alt grupta da korunması gerektiğini bilmemesi sebebiyle (önceki bilgileri kullanma bileşeninin tamamlanamaması) işlemlerini ilerletememiş ve ispatı yapamamıştır.

1. Problemin çözümüne yönelik bulgular

MÖA'nın çözüm süreçleri incelendiğinde 4 öğretmen adayının tamamının problemi anladığı, çözüm için bir plan oluşturduğu ve planı uyguladığı görülmüştür. Öğretmen adaylarından Banu ve Beste çözümün sonunda değerlendirme de yaparak çözümün doğruluğunu kontrol etmişlerdir. Öğretmen adaylarının tamamı soruda geçen '… en az kaç kapla …' ifadesinden yola çıkarak büyük olan kaptan daha fazla kullanılması gerektiği muhakemesini yapmış, problemi anlamış ve değer vererek kap sayısını bulmuşlardır. Her ne kadar Beste ve Arzu denklem kurarak (plan oluşturma) çözüme başlamış olsalar da hiçbir öğretmen adayı formal matematiksel yazıma uygun bir biçimde problemin çözümünü yazamamıştır. Banu ve Beste 44 er litrelik birer kap çizerek; Ayda, 4, 5 ve 6 litrelik üç kap çizerek soruyu görselleştirmeye (problem anlama ve plan oluşturma) çalışmışlardır. Denklem kurarak çözüme başlayan Arzu, en küçük ortak katlarını bulmayı düşünmüş ancak sonrasında bunun anlamsız olacağını ifade ederek en küçük ortak katlarını bulmaktan vazgeçmiştir. Banu, Beste ve Arzu kaplara değer vererek 44 litreyi elde etmeye çalışmışlardır (planı uygulama). Diğer öğretmen adaylarından daha farklı bir düşünme süreci sergileyen Ayda ise önce her kabı birer kez kullanmış ardından kalan litre üzerinden değer vererek toplamda kaç kap kullanması gerektiğini bulmuştur.

Öğretmen adaylarının çözmesi beklenen 1. problem ve çözümü ile Beste'nin problem çözme ve sesli düşünme süreci aşağıdaki gibidir:

Beste: *[Soruyu sesli okudu.] Her kap en az bir kez kullanılmak şart koşuluyla, neyse diğer soruya geçeyim anlayamadım bunu. [Dördüncü soru üzerine düşündükten sonra tekrar üçüncü soruya geri dönerek problemi sesli okudu.] 44 litrelik bir suyum var. [Şekil 3'teki gibi bir kap çizerek 44 lt yazdı.] [Problemin ifadesini göstererek] her kap en az bir kez kullanılmak koşuluyla, yani 4 litrelik 5 litrelik ve 6 litrelik kaplar birer kez kullanılmak ha en az bir kez kullanılmak koşuluyla bu suyun tamamı en az kaç kapla aktarılabilir? [Problem durumunu anlamaya çalıştı.] Şu şekilde dersem 4k, 5l mi desem?*

Araştırmacı: *Farketmez.*

Beste: *Ya da 6z, bunların 44 lük olması gerekiyor ['$4k + 5l + 6z = 44$' yazdı.] Mantık olarak düşünürsek; en az kapla aktarılması için en fazla litre olan kabı [yazdığı denklemdeki '$6z$'yi göstererek] kullanmam gerekir daha fazla. O zaman yani bunu [yazdığı denklemdeki '$6z$'yi göstererek] ben, bir saniye [düşünüyor] 5 defa kullanmış olsam 30, geriye 14 kalır [düşünüyor] buradan hıh burayı [yazdığı denklemdeki 'l'yi göstererek] 2 defa kullanırım, burayı [yazdığı denklemdeki 'k'yı göstererek] 1 kere kullanırım. 6 defa kullansam 36 geriye 8 kalır [düşünüyor] bunların [yazdığı denklemdeki '$4k + 5l$'yi göstererek] katı şeklinde yazamam ama en az bir kere kullanılacağı için bu şekilde olur, evet. Mantık olarak düşündüğünde yani*

6 litrelik kabı 5 defa, 5 litrelik kabı 2 defa, 4 litrelik kabı da 1 kere kullanmam gerekir.

Araştırmacı: *Yani toplamda kaç kap?*

Beste: *Yani toplamda 8 kap.*

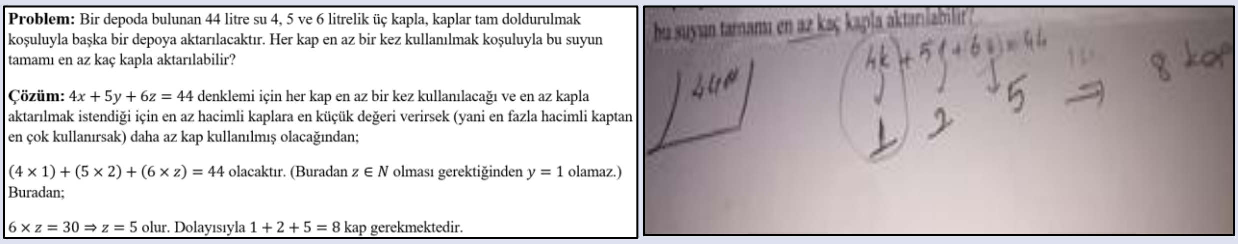
Görüldüğü gibi Beste, her ne kadar önce soruyu anlamakta güçlük çekmiş olsa da sonrasında beklenen çıkarımı/muhakemeyi yapabilmiştir. Burada Beste'nin 44 lt lik bir kap çizmesi, "*ha en az bir kez kullanılmak koşuluyla*" şeklindeki ifadesi ve denklem kurabilmesi problemi anladığının göstergesidir. Beste denklem kurarak çözüme başlamış ve deneme yöntemiyle doğru sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla Beste, problem anlamış, çözüme yönelik bir plan geliştirmiş ve uygulamıştır. "*Mantık olarak düşündüğünde yani 6 litrelik kabı 5 defa, 5 litrelik kabı 2 defa, 4 litrelik kabı da 1 kere kullanmam gerekir.*" ifadesinden de problemin çözümüne yönelik bir değerlendirme yaptığı görülmektedir.

2. Problemin çözümüne yönelik bulgular

MÖA'nın çözüm süreçleri incelendiğinde Arzu problemi anlamış ve bir plan geliştirebilmiş olmasına rağmen geliştirdiği planı uygulayamamış ve problemi çözememiştir. Ayda, problemi anlamasına ve çözmek için bir plan belirlemesine rağmen alt küme olması durumunu göz ardı etmiş ve (dört basamaklı sayı gibi düşünerek) elemanların yerleri değişmesi hâlinde farklı bir durumun oluşacağı yanılgısına düşmüştür. Alt küme olduğu hatırlatıldığında ise tüm durumları tek tek yazarak problemi çözme yoluna gitmiştir. Banu her ne kadar alt küme kavramını hatırlayamadığını söylese de 2^n yazmış, ardından "*aslında şey değil mi bu permütasyon, kombinasyon?*" ifadesinden de anlaşılacağı üzere sorunun nasıl çözüleceğini bilmesine rağmen işlem yapmamış ve problemi çözmek istemediğini ifade etmiştir. Buradan Banu'nun problemi anlamadığı ve çözüm için bir plan geliştiremediği görülmüştür. Beste ise üçüncü problemden önce dördüncü problemi çözmeye çalışmış, dördüncü problemi okuduktan sonra "*buradaki rakamların sayısı alacağı harflerden fazladır (…) Bir rakam üç sayı falan, o şekilde mi alsam acaba? (…) Of kafam karıştı.*" diyerek bir plan oluşturmaya çalışmış ancak devam ettirememiştir. Üçüncü problemin çözümüne geçen Beste bu problemin çözümünün ardından yeniden dördüncü probleme döndüğünde ise problemi çözemeyeceğini, aklına gelen fikirleri çözüme nasıl uygulayacağını bilmediğini ifade etmiştir. Yani Beste, problemi anlamış ancak çözüm için bir plan oluşturamamış ve uygulayamamıştır.

Öğretmen adaylarının çözmesi beklenen 2. problem ve çözümü ile Arzu'nun problem çözme ve sesli düşünme sürecine yönelik bulgu ve yorumlar aşağıdaki gibidir:

Arzu "*şimdi iki iki olursa eşit olacağı için bizden istenen şartı sağlamayacak. (Problemdeki ifadeyi göstererek) Rakam sayısı harf sayısından fazladır öyleyse harfi ister istemez bir tane almamız gerekiyor. Her birisi için tek tek düşünürsek…*" diyerek çözüme başlamış ve her harf için $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$ ve $\{1,3,4\}$ durumlarını göz önüne almış 3 tane de harf olduğundan 9 tane alt küme yazılacağını bulmuştur. Burada Arzu, $\{1,2,4\}$ durumunu ve bütün elemanların rakamlardan oluştuğu (4 rakam 0 harf olması) durumunu gözden kaçırdığı için sonucu yanlış bulmuştur.



Problem: Bir depoda bulunan 44 litre su 4, 5 ve 6 litrelik üç kapla, kaplar tam doldurulmak koşuluyla başka bir depoya aktarılacaktır. Her kap en az bir kez kullanılmak koşuluyla bu suyun tamamı en az kaç kapla aktarılabilir?

Çözüm: $4x + 5y + 6z = 44$ denklemi için her kap en az bir kez kullanılacağı ve en az kapla aktarılmak istendiği için en az hacimli kaplara en küçük değeri verirsek (yani en fazla hacimli kaptan en çok kullanırsak) daha az kap kullanılmış olacağından;

$(4 \times 1) + (5 \times 2) + (6 \times z) = 44$ olacaktır. (Buradan $z \in N$ olması gerektiğinden $y = 1$ olamaz.) Buradan;

$6 \times z = 30 \Rightarrow z = 5$ olur. Dolayısıyla $1 + 2 + 5 = 8$ kap gerekmektedir.

Resim 5. Birinci problemin çözümü ve Beste'nin çözümü

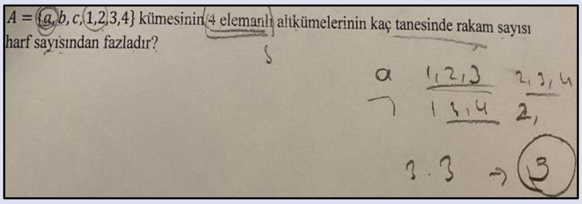
Problem: $A = \{a, b, c, 1,2,3,4\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde rakam sayısı harf sayısından fazladır?

Çözüm: Rakam sayısının harf sayısından fazla olduğu 4 elemanlı durumlar;

3 rakam ve 1 harften oluşan kombinasyonların sayısı: $\binom{4}{3}.\binom{3}{1} = 12$

4 rakam ve 0 harften oluşan kombinasyonların sayısı: $\binom{4}{4}.\binom{3}{0} = 1$

Olup, buradan; 12+1=13 alt kümede rakam sayısı harf sayısından fazladır.



Resim 6. İkinci problemin çözümü ve Arzu'nun çözümü

Çizelge 1. MÖA'nın sesli düşünme yöntemine ilişkin görüşleri.

Kodlar	Öğretmen Adayları
Üst düzey düşünmeyi geliştirme	Beste, Arzu
Bireyin süreçte rahat hissetmemesi	Banu
Problem çözme ya da ispat yapma sürecini yavaşlatması	Ayda
Bireyin gerçekte ne düşündüğünü anlaması	Beste
Bazı işlemlerin ifade edilememesi	Arzu, Ayda
Sadece probleme ya da ispata odaklanılması	Arzu

Görüldüğü gibi Arzu problemi anlamış, gerekli çıkarımı yapmış ve çözmek için bir plan geliştirebilmiştir. Arzu'nun sonucu elde edememesi herhangi bir bilgi eksikliğinden değil dikkatsiz davranmasından ya da çözüm üzerine yeterince düşünmemesinden kaynaklanmıştır. Bu bağlamda Arzu, geliştirdiği planı uygulayamamış ve değerlendirme yapmamıştır.

MÖA'nın Sesli Düşünme Yöntemi ile İlgili Görüşlerine Yönelik Bulgular ve Yorumlar

Yapılan uygulamanın sonunda MÖA'dan sesli düşünme yöntemine ilişkin görüşlerini paylaşmaları istenmiştir. Ayda *"(…) sesli düşününce biraz yavaşlıyor insan (Mülakatçı neden yavaşladığını sordu.) içinde daha çok şey düşünebiliyorsun çünkü"* diyerek bireyin zihninde daha çok şey düşündüğünü ve düşünceleri sesli olarak ifade etmenin çözüm sürecini yavaşlattığını ifade etmiştir. Beste ise *"(…) sesli düşünme olmadan yapsam belki dediğim gibi şurdaki mantığı kendi kafamdan yürütemezdim. (Mülakatçı neredeki mantığı kastettiğini sordu) Mesela diyelim burda (Birinci problemi göstererek) kaç kap kullanacağımı falan. Yani nasıl diyim ifade etme olarak da insanı gerçekten geliştiriyor, kendi benliğinle kalıyorsun cidden yani normalde aslında ne düşündüğünü anlıyorsun bilmiyorum ya güzel birşeymiş ama sesli düşünmek"* ifadeleriyle gerçekte ne düşündüğünü insana gösteren ve mantık yürütmesini sağlayan sesli düşünme ile bireyin kendi benliğiyle baş başa kaldığını ve düşüncelerini sesli olarak söyleme çabasının, ifade etme yeteneğini de güçlendirdiğini belirtmiştir. Diğerlerinin aksine Banu, ders çalışırken sesli çalıştığını ancak birinin karşısında sesli düşünerek soru çözerken çok rahat olamadığını ifade etmiştir. Sesli düşünürken geniş çaplı düşünemediğini ifade eden Arzu'ya göre analiz etme ve konuyu kavrama konusunda sesli düşünme yöntemi avantajlı bir yöntem olmasına rağmen sesli düşünmeksizin çözülen bir problemde farkında olmadan ve zihinden yapılan işlemler sesli düşünme sürecinde atlanabilmektedir. Öğretmen adaylarının sesli düşünmeye yönelik görüşleri analiz edildiğinde çizelge 1.'de belirtilen kodlar ortaya çıkmıştır.

Görüldüğü gibi, öğretmen adaylarından Banu ders çalışırken sesli düşünerek ya da anlatarak çalıştığını ancak soru çözerken ve biri onu izlerken sesli düşünme sürecinde rahat hissedemediğini ifade etmiştir. O hâlde Banu gibi öğrenciler için sesli düşünme yöntemi öğrenme sürecinde uygulanabilir bir yöntem olmasına karşın değerlendirme sürecinde kullanılabilir bir yöntem olmaktan uzaktır. Beste ve Arzu'ya göre sesli düşünme analiz etme ve konuyu kavramaya yardımcı olmakta ve bireyin gerçekte ne düşündüğünü anlamasına olanak tanımaktadır. Ayda ise düşündüklerini sesli olarak ifade etmenin bireyi ispat yapma ve problem çözme sürecinde yavaşlattığını ifade etmiştir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

MÖA'nın matematiksel ispat yaparken ve problem çözerken zihinsel süreçlerinin nasıl ilerlediğini ve sesli düşünme yöntemine ilişkin görüşlerinin neler olduğunu ortaya çıkarabilmek amacıyla yapılan bu çalışma sonucunda, MÖA'nın teorem ispatının ve problem çözümünün nasıl olacağına yönelik genel bir anlayışa sahip oldukları gözlenmiştir. Ancak MÖA'nın ispat yapma ve problem çözme sürecini nasıl ilerletecekleri ve önceden sahip oldukları bilgileri amacına uygun bir biçimde nasıl kullanacakları konusunda zorluk yaşadıkları görülmüştür. Ayrıca gerekli bilgilere sahip olsalar bile formal bir biçimde ispatı oluşturamadıkları tespit edilmiştir. Örneğin; grup özelliklerini bilmelerine rağmen bu özellikleri nasıl kullanacaklarını ve formal bir biçimde nasıl yazacaklarını bilmedikleri tespit edilmiştir. Oysaki Mamona-Downs ve Downs'a (2013) göre ispatın resmi olarak kabul edilen matematiksel dilde ifade edilmesi gerekmektedir.

Öğretmen adayları eğitimleri boyunca yüzlerce teorem ve bunların ispatlarını öğrenmektedirler. Bu durum göz önüne alınırsa, öğrenilen bilgilerin ezbere dayalı edinildiği düşünülebilir (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Öçal ve Güler, 2010). Bu araştırmada da MÖA'nın ispatı tamamlayabilmek için gereken ön bilgilerden yoksun olmaları durumunda ispatı tamamlayamadıkları görülmüştür. Bu bağlamda mevcut bilgilerinin de ezbere dayalı edinildiği düşünülmektedir. Örneğin; alt grup olma özelliğini bilmelerine rağmen grup işleminin alt grupta da korunması gerektiği bilgisinden yoksun oldukları gözlenmiş ve bu durumda alt gruba yönelik edindikleri bilgilerin ezbere dayalı olduğu düşünülmüştür.

Problem çözme sürecinde öğrencinin problemi anlamadan ve bir plan yapmadan çözüme başlaması genellikle işe yaramaz. Öğrenci planını gerçekleştirirken her adımı kontrol ederse birçok hatadan kaçınabilir. Öğrencinin tamamlanmış çözümü yeniden incelememesi yaptığı hataları farketmemesine ya da problemi çözerek elde edeceği olası kazanımlardan yoksun kalmasına sebep olabilir (Polya, 1945). Bu araştırmada da ikinci problemin çözümünde problemi anlayamayan ve çözüm için bir plan geliştiremeyen öğretmen adayı problemi çözmeye başlayamamıştır. Problemi anlamasına ve bir plan geliştirmesine rağmen tamamladıkları çözümleri yeniden gözden geçirmeyen ve planı uygularken adımları kontrol etmeyen öğretmen adayları da çözümlerindeki yanlışları fark edememişlerdir.

Polya'ya (1945) göre problem çözme adımlarından herhangi birinin atlanması çözümde başarısızlığa sebep olabilir. İspat sürecindeki aşamalar da doğrusal olmayan bir biçimde birbirlerine bağlıdırlar ve her aşamanın her ispatta olma zorunluluğu yoktur (Yeşilyurt-Çetin ve Dikici, 2021; Boero, 1999). İkinci problemin çözüm sürecinde problemi anlayarak bir plan geliştirebilen öğretmen adaylarının planı uygulamakta zorlandıkları ve yanlış çözüm geliştirdikleri görülmüştür. Çözüm sonunda değerlendirme yapmadıkları için de yanlışlarını farkedememiş ve düzeltememişlerdir. Birinci teoremin ispatında kavramsal bilgileri seçip kullanamayan, hipotezi ve hükmü belirleyemeyen öğretmen adaylarının; ikinci teoremin ispatında ise önceki bilgileri kullanamayan öğretmen adaylarının ispatı tamamlamakta başarısız oldukları gözlenmiştir. Dolayısıyla bu araştırma kapsamında da görülmüştür ki; problem çözme sürecinde olduğu gibi ispat yapma sürecinde de her bir aşama ayrı bir öneme sahiptir ve bir aşamadaki eksiklik ya da bir aşamanın atlanması bütün süreci olumsuz etkilemektedir.

MÖA'ya göre sesli düşünme yöntemi analiz etme ve konuyu kavramaya yardımcı olan ve bireyin gerçekte ne düşündüğünü anlamasına olanak tanıyan ve üst düzey düşünmeyi geliştiren bir yöntemdir. Sesli düşünmenin düşünme sürecini nasıl etkilediğine yönelik farklı görüşler vardır. van Someren, Barnard ve Sandberg'e (1994) göre sesli düşünme yöntemi düşünme sürecini olumsuz etkilemeyen bir yöntem iken Güneş'e (2012) göre bazı öğrenciler düşüncelerini sözlere dökme sırasında diğer öğrencilerden ve öğretmenden çekinebilir. Bu araştırmada da MÖA'nın sesli düşünme süreçlerinde çekinmeden kendilerini ifade edebilecekleri bir ortam sağlanmış olmasına rağmen Güneş'in (2012) görüşünü destekler nitelikte bir öğretmen adayı sesli düşünme sürecinde -birisinin onu izlediğini bilmesi sebebiyle- rahat olamadığını ifade etmiştir. Dolayısıyla sesli düşünme yöntemi düşüncelerini ifade etmekten çekinen bazı öğrenciler için uygun olmayabilir. Sesli düşünme yöntemi bu öğrencilerin öğrenme sürecinde kullanılabilir ancak değerlendirme sürecinde kullanılması sağlıklı bir sonuç vermeyebilir. Yani öğretmen bu öğrencilerin konuyu anlayıp anlamadıklarına ya da nerede hata yaptıklarına sesli düşünme yöntemi ile karar veremeyebilir. Dolayısıyla öğretmen hangi öğrenciye öğrenme sürecinde, hangi öğrenciye değerlendirme sürecinde bu yöntemi uygulayacağına karar verebilmek için öğrencilerini iyi tanımalı ve değerlendirme sürecinde düşüncelerini sesli olarak ifade etmekten çekinmeyen öğrencilere bu yöntemi uygulamalı ya da öğrencilerini düşüncelerini sesli olarak ifade etmeye aşama aşama alıştırmalıdır.

Bostic'e (2021) göre sesli düşünme, değerlendirme çalışmalarının da bir parçası olduğu için sesli düşünme ile çalışmak akademisyenlere, test geliştiricilere ve uygulayıcılara çok sayıda fırsat sunmaktadır. Bu araştırma sonucunda da sesli düşünme yönteminin öğretim elemanlarına birtakım faydalar sağlayacağı görülmüştür. Örneğin; bu araştırmada öğretmen adaylarının grup özelliklerini bildikleri ispat yapma süreçlerindeki sözlü ifadelerinden anlaşılmaktaydı. Oysa sözlü ifadeleri göz ardı edilerek sadece yazılı süreçlerine bakarak böyle bir çıkarım yapmak mümkün olmayacaktır. Çünkü öğretmen adayları grup özelliklerini ifade etmiş ancak formal matematiksel yazıma uygun bir biçimde yazmamışlardır. Bu konuyu öğrencilerine anlatmış bir öğretim elemanı, sesli düşünme yöntemini esas aldığı bir uygulamayı öğrencilerine yaparak eksik ve yanlış öğrenmeleri tespit edebilir ve eksik öğrenmeleri geliştirmeye yönelik bir süreç takip edebilir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının eksik öğrenmelerini ve varsa kavram yanılgılarını bu şekilde tespit eden bir öğretim elemanı sonraki süreçte öğretim faaliyetlerini, grup özelliklerini yeniden ele alarak değil de bu özelliklerin işlem yapma sürecinde nasıl kullanılacağı ve yazılı olarak nasıl ifade edileceği üzerine yoğunlaştırabilir. Ancak bu yöntem fazlaca zaman gerektirdiği için öğrenci sayısını ya da soru sayısını sınırlamak gerekebilir.

Bu araştırmada elde edilen sonuçlar kullanılan teoremler ve problemlerle ayrıca bir devlet üniversitenin matematik öğretmenliği bölümü 2. sınıf öğrencisi olup uygulamaya katılan dört öğretmen adayı ile sınırlıdır. İleride yapılacak olan çalışmalarda sesli düşünme yönteminin problem çözme ve ispat yapma sürecine etkisini incelemeye yönelik çalışmalar yapılabileceği gibi farklı katılımcı gruplarıyla farklı problem ve teoremler kullanılarak benzer çalışmalar yapılabilir.

Katkı Belirtme ve Teşekkür

Bu araştırmanın uygulamalarına katılan öğretmen adaylarına ve makaleye yapmış oldukları katkılardan ötürü isimsiz hakemlere sonsuz teşekkürler…

Extended Abstract

Introduction

Today, according to mathematicians, mathematics is both theorem-proving and problem-solving (Cellucci, 2017). Problem-solving and mathematical proving are complex intellectual activities that involve more than one process and stage. During these complex intellectual activities, individuals need to express their thoughts verbally in order to learn their thoughts and to reveal what kind of reasoning process they go through. According to Gunes (2012), think aloud is the process of expressing thinking processes and stages with words. Therefore, in this study, it is aimed to embody and reveal the mental processes of pre-service mathematics teachers (PMT) during problem solving and proof making with the help of thinking aloud method.

Problem solving and proving processes are both processes that consist of certain stages. According to Polya (1945), problem solving process consists of four stages: understanding the problem, devising a plan, carrying out the plan, and looking back. According to Yesilyurt-Cetin and Dikici (2021), the process of making a proof consists of five stages to determine the hypothesis, the judgement, the proof method, and the steps of the process (the use of hypothesis, definition, property and conceptual knowledge, and the use of knowledge and perform operations) and completing the proof.

While students think aloud in the process of problem solving and making mathematical proof, they focus on their own mental processes and begin to think about their own thoughts. They develop self-knowledge and self-awareness of what they do and why. As thinking aloud practices increase, this level of self-cognition and self-awareness naturally increases. Therefore, as students use the thinking aloud method, they become aware of their own mental and cognitive processes in problem solving and proving processes, and they consciously advance their processes.

Since the learning process often proceeds without knowing where the mistake was made, existing mistakes bring along new incorrect learnings, and as a result, the student is faced with the danger of being lost in an inextricable network of incomplete/false information. The student, who is aware of what he is doing and why in the process of problem solving and proving, can develop an idea about how he thinks, and will have the opportunity to reinforce his correct knowledge and correct his wrong learning. Therefore, it is thought that by including thinking aloud method in the teaching process, students' mistakes and mental processes in problem solving and proving processes can be revealed and thus the process can be structured more effectively. In this context, the problem solving and proving processes of the PMT should be examined with the thinking aloud method, and the mistakes made should be noticed by the PMT and their mental processes should be revealed. In the context of this necessity, this research aimed to examine the problem solving and proving processes of the PMT with the method of thinking aloud and to reveal their mental processes, as well as to determine their views on the thinking aloud process.

Method

In this study, in which case study design was used, the problem-solving and proving aspects of PMT were focused on, and the findings obtained with the help of the thinking aloud method as a result of the research were described in a rich way. Within the scope of the research, it has been tried to reveal how the problem solving and proof-making situations of the PMT progress and the possible reasons for the right and wrong in this process.

The sample of the study consists of 4 undergraduate students who were able to communicate smoothly with the first researcher and express the problems posed in the abstract algebra and number theory courses verbally by using mathematical expressions. The students were selected from the 2nd-grade students of the mathematics teaching department of a state university. It is important for the participants to be able to communicate smoothly with the researcher, to express their thoughts without hesitation in problem-solving and proof-making processes, and to use the thinking aloud method effectively. The first researcher established a certain affinity with the participants as she was in contact with them during the learning process. Therefore, an environment has been created where they can express themselves without hesitation in their thinking-aloud processes.

Two mathematical problems and two theorem-proof processes are used in practice. Care has been taken to ensure that theorems and problems can be solved by reasoning without relying on rote learning. At the end of the application, the opinions of the teacher candidates about the thinking-aloud method were taken. The data obtained in the study was analyzed three times at different time intervals, and the researchers worked together in the analysis of the data.

Results

When the thinking-aloud processes of the pre-service teachers for the first theorem were examined, it was seen that even if they knew the group characteristics, they did not know how to use them. In other words, the PMT had problems in selecting and using conceptual knowledge. In theorem 2, it was observed that although the pre-service teachers knew and could apply the condition of being a subgroup, they could not do the proof correctly because they did not know or ignored that the group operation should be preserved in the subgroup as well. It was observed that the pre-service teachers lacked the basic knowledge that $(\mathbb{Z},+)$ is a group but $(\mathbb{Z},.)$ is not a group. That is, the PMT failed to prove due to their deficiencies in the component of using knowledge. Although all of the pre-service teachers could not write the solution in accordance with the mathematical writing, they understood the first problem, and were able to develop a plan for the solution, and implement the plan. Only two pre-service teachers looked back. However, even the pre-service teachers who understood the problem and determined the solution method for the second problem were insufficient to solve the problem completely. When the opinions of the pre-service teachers about the thinking aloud method were analyzed, it was seen that one pre-service teacher did not feel comfortable in the thinking-aloud process, and one pre-service teacher stated that expressing the thoughts aloud slowed the individual down. However, according to other pre-service teachers, thinking aloud helps to analyze and comprehend the subject and allows the individual to understand what he or she is really thinking.

Discussion

As a result of this study, it has been observed that they have a general understanding of how the theorem proof and problem solving of PMT will be. However, it has been observed that PMT have difficulties in how to advance the proving and problem-solving process and how to use their previous knowledge in a way that is appropriate for its purpose. In addition, even if they have the necessary information, it has been determined that they have deficiencies in mathematical writing. It has been observed that PMT lack some information that is the basis of some information that will help the process of proving and that is the essence of the subject, so they acquire the information they have in this context based on memorization.

Because think aloud is also part of assessment work, working with think-aloud offers a multitude of opportunities to academics, test developers, and practitioners (Bostic, 2021). As a result of this research, it is seen that the method of think aloud will provide some benefits to the instructors.

An instructor who detects the incomplete learning and misconceptions of prospective teachers in this way can focus his teaching activities on how to use these features in the process of processing and how to express them in writing, not by reconsidering group features in the next process. However, since this method requires a lot of time, it may be necessary to limit the number of students or the number of questions.

According to Polya (1945), skipping any of the problem solving steps may cause failure in the solution. The stages in the proof process are connected to each other in a non-linear way, and every stage does not have to be in every proof (Yesilyurt-Cetin & Dikici, 2021; Boero, 1999). In the solution process of the second problem, it was observed that the pre-service teachers, who could understand the problem and develop a plan, had difficulty in implementing the plan and developed the wrong solution. Since they did not evaluate at the end of the solution, they could not realize their mistakes and could not correct them. Pre-service teachers who could not choose and use conceptual knowledge in the proof of the first theorem and could not determine the hypothesis and judgement in the proof of the second theorem. It was also observed that the pre-service teachers who could not use the previous knowledge failed to complete the proof. Therefore, within the scope of this research, it was seen that; as in the problem-solving process, each stage has a different importance in the process of proving, and the deficiency or skipping of a stage negatively affects the whole process.

According to PMT, the think-aloud method is a method that helps to analyze and comprehend the subject, allows the individual to understand what he or she is really thinking, and develops high-level thinking, but according to Gunes (2012), some students may be afraid of other students and the teacher while putting their thoughts into words. In this study, although an environment where they could express themselves without hesitation was provided during the thinking-aloud processes of the PMT, a pre-service teacher stated that she was not comfortable in the thinking-aloud process because she knew that someone was watching her. Therefore, the think-aloud method may not be suitable for some students who hesitate to express their thoughts. Think aloud method can be used in the learning process of these students, but using it in the evaluation process may not give a healthy result.

Araştırmanın Etik Taahhüt Metni

Yapılan bu çalışmada bilimsel, etik ve alıntı kurallarına uyulduğu; toplanan veriler üzerinde herhangi bir tahrifatın yapılmadığı, karşılaşılacak tüm etik ihlallerde "Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi ve Editörünün" hiçbir sorumluluğunun olmadığı, tüm sorumluluğun Sorumlu Yazara ait olduğu ve bu çalışmanın herhangi başka bir akademik yayın ortamına değerlendirme için gönderilmemiş olduğu sorumlu yazar tarafından taahhüt edilmiştir.

Kaynaklar

Agustyaningrum, N., Husna, A., Hanggara, Y., Abadi, A. M., & Mahmudi, A. (2020). Analysis of mathematical proof ability in abstract algebra course. *Universal Journal of Educational Research, 8*(3), 823-834.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: a complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on The Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7(*8). Retrieved from http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Bostic, J. D. (2021). Think alouds: Informing scholarship and broadening partnerships through assessment. *Applied Measurement in Education*, *34*(1), 1-9. doi: 10.1080/08957347.2020.1835914

Cellucci, C. (2017). Is mathematics problem solving or theorem proving?. *Foundations of Science*, *22*(1), 183-199.

Deshpande, D. S., Riccomini, P. J., Hughes, E. M., & Raulston, T. J. (2021). Problem solving with the pythagorean theorem: A think aloud analysis of secondary students with learning disabilities. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, *19*(1), 23-47.

Güneş, F. (2012). Eğitimde sesli düşünme. *Akademik Araştırmalar Dergisi*, 55, 83-104.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1989). *Problem solving: A handbook for senior high school teachers*. Allyn and Bacon.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *Journal of Mathematical Behavior, 24,* 385–401.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2013). Problem solving and its elements in forming proof, *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 136-162.

Montague, M., & Applegate, B. (2000). Middle school students' perceptions, persistence, and performance in mathematical problem solving. *Learning Disability Quarterly*, *23*(3), 215-227.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., & Yeşildere S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *14*(1), 147–160.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). Principles and standarts for school mathematics, https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/ adresinden 01.01.2021 tarihinde edinilmiştir.

Öçal, M. F., & Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 9, 318-323.

Özkubat, U., & Özmen, E. R. (2018). Öğrenme güçlüğü olan öğrencilerin matematik problemi çözme süreçlerinin incelenmesi: sesli düşünme protokolü uygulaması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Özel Eğitim Dergisi, 19*(1), 155-180. doi: 10.21565/ozelegitimdergisi.299494

Öztürk, M. (2021). Cognitive and metacognitive skills performed by math teachers in the proving process of number theory. *Athens Journal of Education*, *8*(1), 53-71.

Öztürk, M., & Kaplan, A. (2022). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispat yapma süreci: bir durum çalışması. *Eurasian Journal of Teacher Education, 3*(1), 39-54.

Polya, G. (1945). How to Solve it. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rosenzweig, C., Krawec, J., & Montague, M. (2011). Metacognitive strategy use of eighth-grade students with and without learning disabilities during mathematical problem solving: a think-aloud analysis. *Journal of Learning Disabilities*, *44*(6), 508–520. https://doi.org/10.1177/0022219410378445

Van Someren, M. W., Barnard, Y. F., & Sandberg, J. A. C. (1994). *The think aloud method: a practical approach to modelling cognitive processes. (Knowledge-based systems).* London: Academic Press.

Yeşilyurt-Çetin, A. (2017). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçleri. (Yayımlanmış doktora tezi). Ulusal Tez Merkezi Veri Tabanından Erişildi. (UMİ No: 480352)

Yeşilyurt-Çetin, A., & Dikici, R. (2020). Examination of pre-service mathematics teachers' ability to make algebraic proof. *Online Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *1*(1), 75-85.

Yeşilyurt-Çetin, A., & Dikici, R. (2021). Organizing the mathematical proof process with the help of basic components in teaching proof: Abstract algebra example. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 9*(1), 235–255. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1497

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Publishing.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods (4th Ed.).* Thousand Oaks, CA: Sage.