Cumhuriyet International Journal of Education, 13(3): 663-677, 2024
DOI: https://dx.doi.org/10.30703/cije.1409847

Cumhuriyet International Journal of Education

| cije.cumhuriyet.edu.tr | Founded: 2011 Available online, ISSN: 2147-1606 Publisher: Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Analysis of Mathematical Reasoning: The Case of Middle School Students[#]

Hilal Güler Baran[1,a]*, Gönül Yazgan Sağ[2,b]

[1] *Primary Mathematics Teacher, Ankara, Türkiye*
[2]*Gazi Faculty of Education, Gazi University, Ankara, Türkiye*
**Corresponding author*

Research Article

Acknowledgment
[#]This study is produced from the master thesis of the first author under the supervision of the second author. This study was presented as an oral presentation at the 14th International Scientific Research Congress

History
Received: 25/12/2023
Accepted: 21/05/2024

This paper was checked for plagiarism using iThenticate during the preview process and before publication.

ABSTRACT

The aim of this qualitative research is to examine the mathematical reasoning processes of 7th grade middle school students in the context of mathematical problems. Phenomenological research design was adopted in this study. The participants of the research were determined by the maximum diversity sampling method, one of the purposeful sampling methods, in the 2021-2022 academic year, consisting of six 7th grade students studying in a big city in the Central Anatolia Region. In order to reveal the mathematical reasoning processes of the students, 8 mathematical problems were used. Data were collected through individual interviews with each participant and these interviews were recorded with a video camera. These collected data were analysed using the descriptive analysis method, based on the relevant literature. According to the findings, it was observed that the participants displayed all of the analysis, generalization and justification reasoning processes in mathematical problems at various levels. In addition, it was found that the reasoning indicators of some problems differentiated students with high academic achievement from those with moderate or low academic achievement.

Keywords: Reasoning, mathematical reasoning, qualitative research, middle school students, problem solving

Matematiksel Akıl Yürütme Süreçlerinin Analizi: Ortaokul Öğrencileri Örneği

Bilgi
 # Bu araştırma birinci yazarın, ikinci yazar danışmanlığında yürüttüğü yüksek lisans tezinden üretilmiştir. Bu çalışma 14. Uluslararası Bilimsel Araştırmalar Kongresinde sözlü bildiri olarak sunulmuştur.
**Sorumlu yazar*

Süreç
Geliş: 25/12/2023
Kabul: 21/05/2024

Bu çalışma ön inceleme sürecinde ve yayımlanmadan önce iThenticate yazılımı ile taranmıştır.

ÖZ

Bu araştırmanın amacı, ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme süreçlerini matematik problemleri bağlamında incelemektir. Bu araştırma nitel araştırma desenlerinden biri olan fenomenoloji deseni ile yürütülmüştür. Araştırmanın katılımcıları amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örneklemesi yöntemi ile belirlenmiştir. Örneklemini 2021-2022 eğitim-öğretim yılında İç Anadolu Bölgesinde bulunan büyük bir ilde öğrenim gören altı 7. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Öğrencilerin matematiksel akıl yürütme süreçlerini açığa çıkarmak için 8 matematik problemi kullanılmıştır. Veriler, her bir katılımcı ile yapılan bireysel görüşmeler yoluyla toplanmış ve bu görüşmeler video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Toplanan bu veriler ilgili literatür göz önüne alınarak betimsel analiz yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Verilerden elde edilen bulgulara göre, katılımcıların matematik problemlerinde analiz etme, genelleme ve gerekçelendirme akıl yürütme süreçlerinin tamamını çok çeşitli düzeylerde sergiledikleri görülmüştür. Ayrıca bazı problemlerin ortaya çıkardığı akıl yürütme göstergeleri; akademik başarısı yüksek olarak nitelendirilen öğrencileri, akademik başarısı orta ve düşük olarak nitelendirilen öğrencilerden ayrıştırdığı tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Akıl yürütme, matematiksel akıl yürütme, nitel araştırma, ortaokul öğrencileri, problem çözme

[a] *hilallgulerr43@gmail.com* *https://orcid.org/0000-0003-4575-6517*
[b] *gonulyazgan@gazi.edu.tr* *https://orcid.org/0000-0002-7237-5683*

How to Cite: Güler Baran, H., & Yazgan Sağ, A. (2024). Matematiksel akıl yürütme süreçlerinin analizi: Ortaokul öğrencileri örneği. *Cumhuriyet International Journal of Education, 13*(3):663-677

Giriş

Matematik doğası gereği sayılar, cebir, geometri gibi alanlarda birçok konuyu ele alırken örüntüleri keşfetmeyi, akıl yürütmeyi, tahminlerde bulunmayı, gerekçelendirmeyi de içermektedir (Umay, 2003). Böylece matematiği öğrenmek yalnızca temel kavram ve becerilerin kazanılmasını değil aynı zamanda matematikle ilgili düşünmeyi, problem çözme stratejilerini kavramayı ve matematiğin gerçek hayat içerisinde çok önemli bir yeri olduğunu fark etmeyi de içermektedir (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018). Amerika Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]) (2014) etkili bir matematik öğretim sürecinin, birden çok strateji kullanımını içeren durumları çözüm ve tartışma sürecine dâhil etmeyi ve akıl yürütme becerisini teşvik etmeyi kapsadığına değinmiştir. Dolayısıyla matematiği anlam bütünlüğü içinde öğrenme ve matematikte başarı gösterme yollarının matematiksel akıl yürütme ve matematiksel düşünmeden geçtiği söylenebilir (Umay & Kaf, 2005).

Bunun yanında matematiksel akıl yürütme tanımına dair literatüre bakıldığında ortak bir görüş olmamakla birlikte, bu kavrama ait tanımlama çabaları kendini veya başkalarını ikna etme niyetiyle argümanlar geliştirmeyi ve iletmeyi içermektedir (Jeannotte & Kieran, 2017; Pedemonte, 2007). Jeannotte & Kieran (2017) literatürde kabul görmüş matematiksel akıl yürütme çalışmalarını ve bu çalışmalarda yapılan akıl yürütme tanımlarını incelemişlerdir. Bu çalışmalarda akıl yürütmenin (i) yapısal yönüne ve (ii) süreç yönüne vurgu yapıldığını belirtmişlerdir. Tümevarımsal, tümdengelimli ve abdüktif akıl yürütme gibi daha tipik akıl yürütme formlarını öne çıkaran çalışmalar (Meyer, 2010; Reid, 2003; Rivera, 2008; Toulmin, 2007) akıl yürütmenin yapısal yönünü öne çıkarmaktadır. Diğer taraftan benzerlikleri ve farklılıkları araştırmayı ve doğrulamayı içeren akıl yürütmenin süreç yönünün altını çizen de birçok araştırma bulunmaktadır (Mason, 1982; Pedemonte, 2007; Stylianides, 2008). Matematiksel akıl yürütmenin süreç yönünü oluşturan karşılaştırma ve kıyaslama, varsayım oluşturma, gerekçelendirme ve genelleme gibi farklı akıl yürütme süreçlerinin birbiriyle ilişkili olduğu da yine birçok araştırmacı tarafından ortaya konulmuştur (Ellis, 2007; Jeannotte & Kieran, 2017; Stylianides, 2007; Lannin vd., 2011). Bu tanımlamalar göz önüne alındığında; akıl yürütmenin, öğrencilerin matematiksel varsayımlar oluşturup, bu varsayımları doğrulayarak yeni bilgiler ortaya koymalarına aracı olduğu aşikârdır.

Alan yazın incelendiğinde matematiksel akıl yürütme ile ilgili çok çeşitli çalışmaların yer aldığı görülmektedir. Bu çalışmaların bir kısmı öğretmenlerin akıl yürütmeye dair anlayışlarının ne olduğu ile birlikte nasıl geliştirilebileceğini araştırırken (Francisco ve Maher, 2011; Herbert vd., 2022; Vale vd., 2017), bir kısmı öğretmenlerin akıl yürütme sürecini değerlendirme biçimlerini ortaya çıkarmaya çalışmıştır (Bragg & Herbert, 2018; Herbert & Bragg, 2021; Herbert vd., 2022; Herbert & Williams, 2023; Loong vd., 2018). Yine literatürde (Lannin, 2005; Mata-Pereira & Ponte, 2017) öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerini geliştiren öğretmen eylemlerine odaklanan çalışmalar da yer almaktadır. Bahsi geçen bu çalışmaların genellikle matematiksel akıl yürütmenin yapısal yönüne yoğunlaşmakta olduğu ve bu anlamda ortaokul öğrencilerinin akıl yürütmelerinin süreç yönünü inceleyen çalışmaların daha kısıtlı olduğu, çoğunlukla ilkokul ve lise öğrencileri ile çalışıldığı ileri sürülebilir (Ellis, 2007; Herbert vd., 2022; Jeannotte & Kieran, 2017; Loong vd., 2018; Peker, 2020; Widjaja & Vale, 2021). Matematiksel akıl yürütmenin süreç yönünü öne çıkaran çalışmalar arasında, matematik sınıflarında öğrencilerin açığa çıkan akıl yürütmelerinin değerlendirilebilmesini ve çeşitli düzeylerde detaylı bir şekilde betimlenebilmesini amaçlayan bir yaklaşım dikkat çekmektedir (Bragg vd., 2013; Bragg & Herbert, 2018; Herbert vd., 2022; Herbert ve Bragg, 2021; Herbert & Williams, 2023; Vale vd., 2017; Loong vd., 2018; Widjaja vd., 2021). Bu yaklaşımda, matematiksel akıl yürütme süreçleri ve bu süreçlere ait düzeyler detaylı bir şekilde belirlenmiştir (Herbert vd., 2022; Loong vd., 2018).

Bu araştırmada odaklanılan matematiksel akıl yürütme süreçleri için Bragg ve arkadaşlarının (Bragg vd., 2013; Bragg & Herbert, 2018; Herbert vd., 2022; Herbert & Bragg, 2021; Herbert & Williams, 2023; Vale vd., 2017; Loong vd., 2018; Widjaja vd., 2021) matematik sınıflarında öğrencilerin açığa çıkan akıl yürütmelerinin değerlendirilebilmesini ve çeşitli düzeylerde detaylı bir şekilde betimlenebilmesini amaçlayan yaklaşımı dikkate alınmıştır. İlgili araştırmacılar, öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini incelemek için "Matematiksel Akıl Yürütme Eylemleri ve Düzeyleri (Mathematical Reasoning Actions And Levels)" adını verdikleri bir yapı oluşturmuşlardır. Bu yapı, Loong vd. (2018) ile Herbert vd. (2022) tarafından matematiksel akıl yürütme süreçleri ve bu süreçlere ait düzeyler olacak şekilde detaylı bir şekilde belirlenmiştir. Bu sınıflamada yer alan üç matematiksel akıl yürütme süreci şöyle sıralanabilir: (i) analiz etme (analysing); (ii) genelleme (forming conjectures and generalising) ve (iii) gerekçelendirme (justifying and logical argument) (Vale vd., 2017). Analiz etme süreci; benzerlikleri ve ilişkileri fark etme, ortak özellikler ile farklı özellikleri fark etme ve araştırma eylemlerini içermektedir. Genelleme sürecinin içerdiği eylemler ise ortak özellikler ile ilgili varsayım da bulunma, başka örnekler ile bir ortak özelliği genişletme ve özellikleri genelleme olarak sıralanabilir. Son olarak, gerekçelendirme süreci otoriteye başvurma, ortak özelliği bir örnek veya karşıt örnek ile açıklama, bir yığındaki her bir elemanın ortak özelliği sağladığını doğrulama ve mantıksal argüman kullanarak genellemeyi genişletme eylemlerini kapsamaktadır (Vale vd., 2017). Belirtilen bu tür eylemler; belirgin değil (not evident), başlangıç (beginning), gelişmekte olan (developing), sağlamlaştıran (consolidating) ve genişleten (extending) olmak üzere beş düzey şeklinde ele alınmıştır. Böylece matematiksel akıl yürütme süreçlerini bütüncül bir bakış açısıyla ve derinlemesine değerlendirmek mümkün hale gelmiştir

(Herbert vd., 2022; Loong vd., 2018; Vale vd., 2017). Matematiksel akıl yürütme eylemlerine ve düzeylerine ait detaylar Çizelge 1'de verilmiştir.

Bunun yanında Swan (2011), matematik derslerinde akıl yürütmenin yazılı ve sözlü açıklamalarla görünür ve işitilebilir hale getirilmesi gerekliliğini vurgulamıştır. Öğrencilerin çözümünü hemen göremedikleri, kendilerini zorlayan bir problemi çözerken akıl yürütmeye başvurdukları gözlemlenmiştir (Lampert, 2001). Bu nedenle matematiksel akıl yürütmenin ortaya çıkarılabilmesi için öğrencilere bahsi geçen süreçleri ortaya çıkaracak problemlerin sunulması gerektiği ileri sürülmektedir. Öğrencilerin matematiksel bir problemle uğraşırken nasıl düşündüklerini ve nasıl çıkarımda bulunduklarını anlamak, onların öğrenmelerinin nasıl gerçekleşiyor olabileceği hakkında eğitimcilere çeşitli ipuçları verebilir (Yeşildere & Türnüklü, 2007). Bahsi geçen ipuçlarının açıkça görülebilmesi için matematiksel akıl yürütmenin süreç yönüne odaklanmak önem arz etmektedir. Dolayısıyla ortaokul öğrencilerinin problem çözerken açığa çıkan çeşitli akıl yürütme süreçlerinin ortaya konulması matematik öğretmenlerinin; öğrenme ortamlarında açığa çıkan matematiksel akıl yürütme süreçlerini derinlemesine irdeleyebilmelerine ve yorumlayabilmelerine yardımcı olacağı düşünülmektedir. Bu bağlamda araştırmanın problemi "Ortaokul 7. sınıfta öğrenim gören öğrencilerin matematik problemleri bağlamında matematiksel akıl yürütme süreçleri (analiz etme, genelleme, gerekçelendirme) nasıldır?" şeklindedir.

Yöntem

Araştırma Deseni

Nitel bir araştırma olarak tasarlanan bu çalışmada, matematiksel problemler bağlamında öğrencilerin akıl yürütüme süreçlerini ayrıntılı bir şekilde ortaya konulması amaçlandığından fenomenoloji (olgubilim) deseni işe koşulmuştur (Yıldırım & Şimşek, 2018). Deneyimlerin özünü ortaya çıkarmayı hedefleyen fenomenoloji, farkında olduğumuz ancak derinlemesine ve ayrıntılı bir anlayışa sahip olmadığımız olgulara odaklanmaktadır (Patton, 2002; Yıldırım & Şimşek, 2018). Bu bağlamda öğrencilerin matematiksel akıl yürütmeleri, bu çalışmanın fenomeni olarak belirlenmiştir.

Katılımcılar

İlköğretim matematik öğretim programı (MEB, 2018) incelendiğinde matematiksel akıl yürütme süreçlerini ortaya çıkarabilecek potansiyele sahip kazanımların 7. sınıfta yer aldığının tespit edilmesi nedeniyle; katılımcıların 7. sınıf öğrencileri olması, matematik eğitimi alanında uzman bir akademisyenin görüşü de alınarak uygun görülmüştür. Bu nedenle araştırmada örgün eğitimlerine destek olma amacı taşıyan bir eğitim kurumunda 7. sınıfta öğrenim gören, sahip olduğu düşünceleri ve anlayışları ifade etmekte güçlük yaşamayan yani araştırmanın fenomeni olan matematiksel akıl yürütmelerini rahat bir şekilde dışa vurabilecek katılımcılar belirlenmiştir. Birinci araştırmacının matematik derslerini yürüttüğü sınıfların 7. sınıf düzeyinde olması, muhtemel katılımcılar ile ilgili araştırmacının uzun süre etkileşimini mümkün kılmıştır. Öğrencilerin seçiminde sınıf içi matematik performansları ve genel başarı değerlendirme sınav sonuçları göz önünde bulundurulmuştur. Maksimum çeşitlilik örneklemesi yöntemi (Yıldırım ve Şimşek, 2018) ile akademik başarısı düşük olan 2 öğrenci; orta olan 2 öğrenci ve yüksek olan 2 öğrenci olmak üzere 2021-2022 eğitim öğretim yılında öğrenim gören toplam 6 ortaokul öğrencisi seçilmiştir ve öğrencilere takma isimler verilmiştir. Kurumda eğitim alan toplam 53 tane 7. sınıf öğrencisinin katıldığı genel başarı değerlendirme sınavına ait sıralamalarına Çizelge 2'de yer verilmiştir.

Veri Toplama Süreci ve Araçları

Bu araştırmada veri toplama aracı olarak kullanılabilecek problemler, matematiksel akıl yürütme literatürü göz önüne alınarak belirlenmiştir. Akıl yürütme süreçlerini ortaya çıkaracağı düşünülen, uzman görüşü alınarak ve pilot görüşmeler yapılarak belirlenen 8 adet matematik problemi Ek 1' de yer almaktadır.

Bu araştırmanın verileri; birinci araştırmacı tarafından gerçekleştirilen bireysel görüşmeler yoluyla elde edilmiştir. Öğrencilerin düşünme süreçlerini ve böylece bilişsel olarak gerçekleştirdikleri eylemleri sesli bir şekilde ortaya çıkarmalarını amaçlayan sesli düşünme protokolü (Ericsson, 2006) ile katılımcıların problemleri çözmeleri istenmiştir. Ortalama 20 dakika süren bireysel görüşmeler kamera ile kaydedilmiştir. Görüşmeler sırasında katılımcıların akıl yürütme süreçlerine dair formal olmayan problem çözme sürecinde ortaya çıkabilen akıl yürütme süreçlerine dair çeşitli notlar alınmıştır. Bu notlar veri çözümlemesi sırasında araştırmacıların daha dikkatli olmasını sağlamıştır.

Verilerin Analizi

Araştırmada elde edilen verilerin analizinde betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır (Yıldırım & Şimşek, 2018). Bu bağlamda matematiksel akıl yürütme süreçlerini değerlendirmek için literatüründe yer alan matematiksel akıl yürütme süreçlerine ait göstergeleri en açıklayıcı şekilde yansıttığı düşünülen, Loong vd. (2018) ile Herbert vd. (2022) tarafından geliştirilen analiz etme, genelleme ve gerekçelendirme süreçlerine ait düzeyler kullanılmıştır (bakınız Çizelge 1).

Gerekli durumlarda birinci araştırmacının görüşmeler sırasında tuttuğu formal olmayan gözlem notları da ham veriler çözümlenirken kullanılmıştır.

Çizelge 1. Matematiksel akıl yürütme süreçleri

	Analiz Etme	Genelleme	Gerekçelendirme
Belirgin Değil	*Örneklerin veya durumların sayısal veya uzamsal yapısını fark etmez. *Örneklerin veya durumların matematiksel olmayan yönleriyle ilgilenir.	*Örüntü için ortak bir özellik veya kural açıklamaz. *Durumların veya örüntülerin sistematik olmayan kaydını tutar. *Durumlar, ilişkiler veya örüntüler hakkında rastgele gerçekler sunar/belirtir.	*Gerekçelendirme yapamaz. *Öğretmene veya başkalarına danışır/başvurur.
Başlangıç	*Örnekler arasındaki benzerlikleri fark eder. *Örneklerle ilgili rastgele/gelişigüzel bir şekilde bilinen gerçekleri hatırlar. *Görsel olarak veya materyal kullanımıyla sergilenen örüntüleri hatırlar ve tekrarlar. *Durumları ortak bir özelliğe göre ayırmaya çalışır.	*Tek bir ortak özelliğe veya örüntüde tekrar eden bileşenlere dikkat çekmek ve açıklamak için beden dilini, çizimi, saymayı ve sözel dili kullanır. *Şekillerle veya materyallerle söz ve/veya görsel olarak sergilenen örüntülere eklemeler yapar.	*Ne yaptıklarını ve neden doğru olabileceğini veya olmayabileceğini tarif eder/betimler. *Materyalleri, nesneleri veya sözcükleri kullanarak neyin doğru neyin yanlış olduğunu fark eder. *Bilinen gerçekler gibi basit ölçütlere dayalı yargılarda bulunur. *Argümanı tutarlı olmayabilir veya akıl yürütme sürecindeki tüm adımları içermeyebilir.
Gelişmekte Olan	*Ortak sayısal veya uzamsal bir özelliği fark eder. *Sayısal veya uzamsal yapıyı kullanarak örüntüleri hatırlar, tekrarlar ve genişletir. * Ortak bir özelliğe göre durumları sıralar ve sınıflandırır. *Neyin aynı olduğunu/ aynı kaldığını ve neyin farklı olduğunu/değiştiğini göstermek için durumları düzenler.	* (i) Kelimeleri, şekilleri veya sayısal ifadeleri kullanarak bir özelliğe dair veya (ii) yinelemeyi/tekrarlamayı göstermek için kelimeleri, şekilleri kullanarak veya tekrarlı eklemeler şeklindeki örüntüyü açıklamak için sayısal ifadeler kullanarak bir örüntüye dair bir kural açıklar. *Bir tek örnek kullanarak kuralın anlamını ifade eder.	*Her bir durumu doğrulayan ortak bir özellik, kural veya bilinen gerçekleri kullanarak ifadelerin doğruluğunu onaylar. Materyaller ve formal olmayan yöntemler de kullanılabilir. *Aksine örnek vererek bir iddiayı reddeder. * Bir mantıksal argümandaki başlangıç ifadeleri doğrudur ve sınıf tarafından kabul edilir. *Materyaller, şekiller ve formal olmayan yazılı yöntemler kullanarak tutarsızlıkları ve hataları tespit eder ve düzeltir.
Sağlamlaştıran	*Sistematik olarak bilinen gerçekleri veya özellikleri göz önünde bulundurarak ve/veya daha başka durumlar oluşturarak birden fazla ortak özelliği fark eder. *Hem sayısal hem de uzamsal yapıyı kullanarak örüntüleri tekrarlar ve genişletir. *(i) Örüntüde yer alan veya (ii) aynı özelliğe sahip diğer durumlar hakkında bir tahminde bulunur.	*Ortak bir özellik hakkındaki kuralın (genelleme) sınırını veya sınırlarını belirler/tanımlar/belirtir. *Bir sayısal ifade kullanarak örüntüdeki bir terimi bulma kuralını açıklar. *Kuralın nasıl çalıştığını/işlediğini açıklamak için başka bir örnek kullanarak durumların sayısını veya örüntüyü genişletir.	*Eksiksiz bir akıl yürütme zincirine sahip doğru bir mantıksal argüman kullanır ve 'çünkü', 'eğer… ise…', 'bu nedenle', 've böylece', '…buna yol açar' ...” gibi sözcükleri kullanır *Mantıksal argüman kullanarak genellemeyi genişletir.
Genişleten	*: (i) Ortak özellikler veya (ii) örüntülerin sayısal ifadeleri arasındaki ilişkileri fark eder ve keşfeder. *: (i) Araçları, teknolojiyi ve modellemeyi kullanarak veya (ii) bir varsayım oluşturmak için örnekler üretir.	*Cebirsel semboller de dahil olmak üzere kelimeler veya semboller kullanarak herhangi bir durum için kuralı açıklar. *Daha fazla örnek veya durum bulmak için kuralı kullanır/kurala başvurur. *Ortak özellikler arasındaki ilişkiye dair bir ifade oluşturarak özellikleri genelleştirir. *Aynı örüntüyü tanımlamak için kullanılan farklı sembolik ifadeleri karşılaştırır.	*Oldukça matematiksel ve açıklanamayan hiçbir şey bırakmayan sağlam bir mantıksal argüman kullanır. *İfadenin doğru olduğunu veya genellemenin tüm durumlar için geçerli olduğunu mantıksal argüman kullanarak doğrular.

Çizelge 2. Katılımcıların genel başarı değerlendirme sınavına ait sıralamaları

	Düşük	Orta	Yüksek
Alperen	46		
Hazal	26		
Beren		17	
Elif		11	
Emir			4
Aras			1

Katılımcıların verdikleri yanıtlar; matematiksel akıl yürütme süreçlerine ait göstergeler doğrultusunda her bir süreç (analiz etme, genelleme, gerekçelendirme) ve düzey (belirgin değil, başlangıç, gelişmekte olan, sağlamlaştıran, genişleten) için detaylı bir şekilde analiz edilmiştir. Örneğin Problem 6'da Elif'in "Bunu her türlü örüntüde kullanabiliriz mesela 3'er 3'er artıyorsa ve 6 ile ya yok 5 ile başlıyorsa 3n+2 olur." ifadesi Çizelge 1'de genelleme sürecinin genişleten düzeyindeki "Ortak özellikler arasındaki ilişkiye dair bir ifade oluşturarak özellikleri genelleştirir." göstergesine bir örnek olarak verilebilir.

Geçerlilik ve Güvenirlik

Araştırmada geçerliliği ve güvenirliği sağlamak için inandırıcılık, aktarılabilirlik, tutarlık ve teyit edilebilirlik stratejileri göz önüne alınmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). İnandırıcılık için birinci araştırmacı belirlenen öğrencilerin aynı zamanda matematik öğretmeni olduğu için katılımcılarla uzun süreli etkileşim içinde olmuştur. Ayrıca araştırmada veri kaynakları çeşitlendirilmesi sağlanmıştır. Bunun yanında araştırmanın deseni ve veri toplama araçlarının oluşturulması süreci de dahil olmak üzere hemen her aşamasında uzman görüşü alınmıştır. Araştırmanın aktarılabilirliğini arttırmak için elde edilen bulgular, Loong vd. (2018) tarafından geliştirilen matematiksel akıl yürütme süreçleri değerlendirme kriterlerine göre ayrıntılı bir şekilde betimlenmiştir. Araştırmanın tutarlılığını artırmak adına da birinci araştırmacı, bütün bireysel görüşmelerde katılımcılara aynı yaklaşımı sergilemeye çalışmıştır. Son olarak araştırmanın teyit edilebilirliğini artırmak için araştırmada veri analizinin nasıl yapıldığı ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Ayrıca veri analizi yapıldıktan sonra matematik eğitiminde uzman bir araştırmacının, matematiksel akıl yürütme göstergeleri doğrultusunda ham verilerin yaklaşık %10'luk kısmını tekrardan kodlaması sağlanmıştır ve kodlamalar arasında %90 oranında benzerlik bulunmuştur. Bu oran, araştırmacılar ile uzman arasındaki görüş birliği sayısının, tüm görüşlerinin sayısına oranlanması ile elde edilmiştir (Miles & Huberman, 1994). Kodlamalarda üzerinde uzlaşılmayan kısmı için de uzman ile araştırmacılar ortak karara varılmıştır.

Bulgular

Çizelge 3'te literatür ışığında belirlenen akıl yürütme süreçlerine ait beş düzeye göre katılımcıların akıl yürütme süreçlerinin nasıl bir dağılım sergilediği özetlenmiştir. Göz önüne alınan matematiksel problem numarası X olmak üzere; düşük başarı gösteren öğrenciler olarak belirlenen Hazal ve Alperen normal yazı karakteri ile (örneğin Hazal/PX); orta başarı gösteren öğrenciler olarak belirlenen Elif ve Beren büyük ve altı çizili yazı karakteri ile (örneğin <u>ELİF/PX</u>) ve yüksek başarı gösteren öğrenciler olarak belirlenen Emir ve Aras ise büyük, kalın ve altı çizili yazı karakteri ile (örneğin **EMİR/PX**) belirtilmiştir.

Çizelge 3'te Problem 3 ve Problem 5 verilerine dikkatle bakıldığında yüksek başarı gösteren öğrenci olarak nitelendirilen Aras dışında tüm katılımcıların hemen hemen tüm akıl yürütme süreçlerinin çoğunlukla belirgin değil düzeyinde yığıldığı görülmektedir. Bunun nedeni Aras hariç diğer öğrencilerin bahsi geçen problemleri tam olarak anlayamamalarıdır. Bir diğer neden ise bireysel görüşmelerde sesli düşünme protokolü kullanıldığından, öğrencilerin problem çözme süreçlerine herhangi bir müdahalede bulunulmamış olmasıdır.

Analiz Etme Süreci

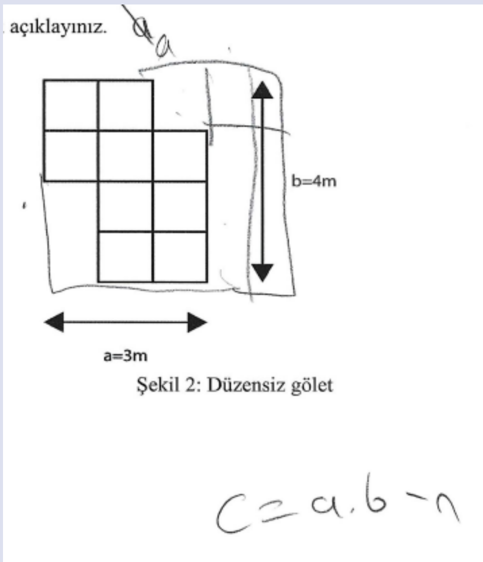
Analiz etme süreci bağlamında katılımcıların yanıtları incelendiğinde 6 katılımcının 4'ünde (Aras, Emir, Elif ve Beren) verilen yanıtlar genişleten düzeyde göstergeler içermektedir. Örneğin Aras Problem 1'in a şıkkını çözmeye çalışırken şu açıklamada bulunmuştur: "Şimdi 1 tane masa olduğu zaman 5 çocuk oturabiliyorsa, 2 tane masa var 8 çocuk oturabiliyor. Burada 3 artıyor direkt. 3n [yazarak] olacak, ama 1.adımda 5 olabilmesi için 3n+2 oluyor." Aras'ın açıklanması dikkate alındığında, Problem 1'de masalara oturacak öğrencilerin oluşturduğu örüntüyü sayısal olarak fark ettiği görülmektedir. Ayrıca Aras, örüntü kuralını "3n+2" olarak ifade etmiştir. Bu durum örüntüyü oluşturan sayılar ile örüntünün kuralı arasındaki ilişkiyi anlamlandırdığına dair gösterge olarak yorumlanmıştır. Yapılan bu araştırmada Çizelge 1 bağlamında genişleten düzeyinde bir gösterge olarak belirtilmeyen ancak literatürdeki ilgili diğer çalışmalarda (Vale vd., 2017) bu düzeye giren çeşitli eylemler ile de karşılaşılmıştır.

Çizelge 3. Katılımcıların matematiksel akıl yürütme süreçlerinin düzeylere göre dağılımı

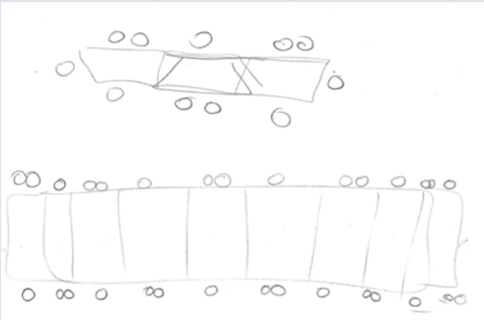
	Analiz Etme	Genelleme	Gerekçelendirme
Belirgin Değil	**EMİR/P3,P5** ELİF/P5 BEREN/P4,P5 Hazal/P3,P5,P8 Alperen/P2,P4,P5,P8	**EMİR/P3,P5** ELİF/P3,P5 BEREN/P3,P4,P5 Hazal/P3,P4,P5,P8 Alperen/P2,P4,P5	**EMİR/P3,P5** ELİF/P5 BEREN/P3,P4,P5,P6 Hazal/P1,P2,P3,P5,P6,P8 Alperen/P1,P2,P4,P5,P8
Başlangıç	**EMİR/P6** ELİF/P3(a),P7 BEREN/P1,P2,P3,P7,P8 Hazal/P1,P2,P4,P7 Alperen/P1,P3,P6,P7	ELİF/P2 BEREN/P1,P2,P8 Hazal/P1,P2,P7 Alperen/P6,P3	ELİF/P2,P3,P7 BEREN/P1,P2,P7,P8 Hazal/P4,P7 Alperen/P1,P3,P6
Gelişmekte Olan	**EMİR/P1** ELİF/P2(c),P3(b),P4 Hazal/P2,P6	ELİF/P7 BEREN/P7 Hazal/P6(c) Alperen/P1,P7	**ARAS/P4,P5,P6,P8** **EMİR/P1,P2,P4,P6,P8** ELİF/P1,P4(b),P8 BEREN/P8 Alperen/P7
Sağlamlaştıran	**ARAS/P2,P4,P8** **EMİR/P4** ELİF/P2(b)	**ARAS/P2(d),P3,P4,P5,P8** **EMİR/P1,P4** ELİF/P1,P4 Hazal/P6(d)	**ARAS/P2,P5,P7** **EMİR/P4,P6**
Genişleten	**ARAS/P1,P3,P5,P6,P7,** **EMİR/P2,P6,P7,P8** ELİF/P1,P4(b),P6,P8 BEREN/P6	**ARAS/P1,P2(e),P5,P6,P7** **EMİR/P2,P6,P7,P8** ELİF/P4(b),P6,P8 BEREN/P6	**ARAS/P1,P3,P5,P6** **EMİR/P7** ELİF/P6

Örneğin Aras'ın Problem 3'te yer alan a şıkkında toplamları 19 olan üç doğal sayının çarpımlarının alabileceği en büyük değerin ne olabileceğini araştırırken şu şekilde yanıt vermiştir: "Şimdi eğer biz bu sayıları 'yanlış hatırlamıyorsam' en yakın yaparsak çarpımları en büyük çıkıyordu. Bir dakika hatırlamaya çalışayım. Evet, en yakın 3 doğal sayı bulmaya çalışacağım. [4 saniye düşündü] Birini 9, diğeri 9 versek 1 oluyor [yakın olmadığını düşünerek], olmaz. 8 ve 7 dersek 19-15 ten 8,7,4. Daha yakın da olabilir. 7,7,5. 7,6,6 olabilir diye düşünüyorum. 7×6×6= 252." Aras'ın açıklamasında görüldüğü üzere daha önceki öğrenme deneyimlerinden elde ettiği düşünülen "yanlış hatırlamıyorsam en yakın yaparsak çarpımları en büyük çıkıyordu." ifadesi "ortak bir özelliği fark etme amacıyla geçmiş bilgiyi anımsamak" olarak ele alınmıştır. Bu eylem, literatürde bir karşılaştırma ve kıyaslama eylemi olarak açıklanmaktadır (Vale vd., 2017). Dolayısıyla Aras'ın bu ifadesi analiz etme sürecine dair bir eylem olarak düşünülmektedir. Problemde ele alınacak daha fazla sayıdaki örnekler için bir kural oluşturmasa da ortak özellikleri keşfederek eski bilgisini bir kural olarak kullandığı söylenebilir. Ayrıca bu kuralı öncelikle deneyimlediği başka sayılarla kontrol ettiği görüldüğünden analiz etme sürecinin genişleten düzeyinde olarak değerlendirilmiştir.

Katılımcıların yanıtları incelendiğinde 6 katılımcının 3'ü (Aras, Emir ve Elif) tarafından verilen yanıtları analiz etme sürecinin sağlamlaştıran düzeyinde göstergeler içermektedir. Örneğin Emir Resim 1'de de görüldüğü gibi Problem 4'ün c şıkkında "Şimdi burada kare olduğunu hayal ederiz, şöyle bir şekil çizdiğimizde [çizerek gösteriyor] oluşur zaten. Sonra yine a×b yaparız. Burada eksik kalan n sayısını hesaplarız, -n deriz buluruz." açıklamasında bulunmuştur.



Resim 1. Emir'in Problem 4'e ait çizimi



Resim 2. Beren'in Problem 1'de yer alan çizimleri

Burada Emir'in Resim 1'de yaptığı çizimlerden de anlaşılacağı, düzensiz gölet şeklini önce kare gibi modelleyerek çizim yaptığı belirlenmiştir. Sonrasında ise çizdiği modele göre bir örnek ürettiği için bu eylemleri analiz etme sürecinin sağlamlaştıran düzeyinde olarak yorumlanmıştır.

Analiz etme sürecinin gelişmekte olan düzeyine dair bulgular, 6 katılımcının 3'ünün (Emir, Elif ve Hazal) sergiledikleri eylemlerinden elde edilmiştir. Örneğin Hazal'ın Problem 6'da verdiği yanıt aşağıda yer almaktadır: "Burada 6 tane var, burada 10 tane var. Yani 4'er 4'er artıyor... 4.sırada 18 olur. 5.sırada 22 olur, 6'da 26, 7'de 30, 8'de de 34 olur. 9'da 38, 10'da 42, 11'de 46 olur. 12'de 50, 13'de 54, 14'de 58, 15'de de 62 olur." Hazal'ın verilen sayılar arasındaki artış miktarını 4 olarak belirlediği ve bu artış miktarını örüntüye dair bir kural oluşturmak için kullanmadan, her adımı 4 artırarak diğer sıralardaki koltuk sayılarına ulaştığı görülmektedir. Ayrıca Hazal'ın var olan örüntüyü tekrar ettirdiği düşünüldüğünden, gelişmekte olan düzeyinde bir davranış ortaya koyduğu yorumu yapılmıştır.

6 katılımcıdan 5'inin (Emir, Elif, Beren, Hazal ve Alperen) ise analiz etme sürecinin başlangıç düzeyinde göstergeler içeren eylemlerde bulunduğu görülmüştür. Katılımcılardan Beren, Problem 1'e "11 çocuk oturur… 10 masada.. 5, 8.. Çizsem olur mu?" şeklinde cevap vermiştir. Burada Beren'in masaların birleştirilmesi ve çocuk sayıları arasındaki sayısal ilişkiyi nasıl fark ettiğine dair matematiksel akıl yürütme sürecini açığa çıkaracak bir söylemde bulunmadığı görülmektedir. Ancak Resim 2'de de görüldüğü gibi çocuk sayısını görsel olarak verilen masalar için örüntüyü devam ettirerek problemde istenen örüntüyü tekrar ettiği gözlemlenmiştir. Bu nedenle Beren'in yaptığı çizimler analiz etme sürecine dair başlangıç düzeyinde gösterge olarak değerlendirilmiştir.

Problemleri çözerken 6 katılımcıdan 5'inin (Emir, Elif, Beren, Hazal ve Alperen) çeşitli şekillerde analiz etme sürecinin belirgin değil düzeyinde göstergeler sergiledikleri görülmüştür. Örneğin Emir, Problem 3'e verdiği yanıt şöyledir: "Burada aslında bir tane şey buluruz modunu buluruz 10 çıkar. Yani 10 çıkıyor. Bir de bunun yanına kalan en büyük doğal sayı 9 olacağından dolayı 10×9'dan 90 gelir." Emir'in fark etmesi gereken benzer veya farklı özellikleri fark edemediği, toplamları 19 olabilecek sayı üçlülerine örnek üretemediği ve durumlar arasındaki gerçek sayısal ilişkilerini fark edemediği için konu ile ilgisi olmayan durumlarla ilgilendiği düşünülmüştür. Bu göstergeler, analiz etme sürecinin belirgin değil düzeyinde olarak değerlendirilmiştir.

Genelleme Süreci

Genelleme sürecine göre katılımcıların yanıtları incelendiğinde 6 katılımcının 4'ünün (Aras, Emir, Elif ve Beren) yanıtları bu sürecin genişleten düzeyinde olarak değerlendirilmiştir. Örneğin, Problem 8'de Elif'in söylemi şu şekildedir: "Küçük dişlinin devir sayısı ve büyük dişlinin devir sayısını şu şekilde bulabiliriz, 12; 8 bunlar ters orantılı olduğu için bunları bir ortak noktada ortak katta birleştirmem lazım. 12'nin 2 katı 24, 8'in de 3 katı 24 olduğu için buna 2k, buna da 3k diyebilirim. Bunları aynı yolda gittikleri için bu 3 kere dönecektir ki aynı yolu gidebilsin, 12 dişli olan bisiklet de 2 defa dönerek aynı yolu gidecektir." Elif'in söyleminde dişlilerin aynı yolu gittikleri varsayıldığında, diş sayısıyla devir sayısını çarpması gerektiği kuralını açıkladığı görülmektedir. 24 elde etmeye çalıştığı örnekten de yola çıkarak 12 dişlinin devir sayısını 2k, 8 dişlinin devir sayısını 3k ile sembolize edip cebirsel olarak da ifade edebildiğinden; Elif'in bu söylemleri, genelleme sürecinin genişleten düzeyinde eylemler olarak yorumlanmıştır.

6 katılımcının 4'ünde (Aras, Emir, Elif, Hazal) genelleme sürecinin sağlamlaştıran düzeyine dair çeşitli göstergeler belirlenmiştir. Örneğin katılımcılardan Aras'ın Problem 5 için açıklaması şu şekildedir:

"Üç yüzü oluşacaksa [boyanacaksa] köşelerdekiler üçe boyanır. Bu yüzden köşelerdekilerin sayısını bulurum ki bir küpte yanlış hatırlamıyorsam [sayarak] 8 tane köşe olduğu için 8 tanesinin üç yüzü boyalıdır... Burada [2×2×2'de] her türlü 8'i boyanıyor [3 yüzü boyalıyı kastediyor]. 4×4×4 yani 64'lük küp oluyor. [çiziyor] bu küpte de her türlü 8 tanesinin 3 yüzü boyanır."

Aras 2×2×2'lik küpü çizerek herhangi bir küpün 8 köşesi olduğunu ve köşelerdeki küplerin 3 yüzünün dıştan göründüğünü göstermiştir. Bunun ardından her büyüklükteki küpün, "3 yüzü boyalı küp sayısı 8'dir" kuralını açıkladığı ve bu kuralı 4×4×4'lük küpte de göstererek ifade ettiği kuralı genelleştirdiği görüldüğünden, sağlamlaştıran düzeyde bir gösterge olarak değerlendirilmiştir.

Problemleri çözerken 6 katılımcının 4'ünün (Alperen, Hazal, Beren, Elif) genelleme sürecinin gelişmekte olan düzeyinde eylemler sergiledikleri belirlenmiştir. Örneğin Problem 7'de Beren'in iki tek sayının toplamının çift mi yoksa tek mi olduğunu araştırırken verdiği ifadesi şu şekildedir:

"Çift olur. Çünkü mesela 11 ile 27 geldi aklıma 38 oluyor, çift oluyor. Ya da 7 ile 5 olsun 12, yine çift. Çiftleri toplarsak çiftler de çift oluyor."

Beren'in ifadesi incelendiğinde, iki tek sayının toplamının çift olması özelliğine uyan diğer durumları sıraladığı görülmüştür. İki örnek vererek yeterli sayıda örnekler üzerinde sonucun hep çift sayı çıktığını gösterdiği görüldüğünden, Beren'in eylemleri genelleme sürecinin gelişmekte olan düzeyinde olarak yorumlanmıştır.

6 katılımcıdan 4'ünün (Alperen, Elif, Hazal, Beren) ortaya koyduğu çözümler genelleme sürecinin başlangıç düzeyinde göstergeler içermektedir. Örneğin, Hazal Problem 2 bağlamında özel olan V diyagramının özelliğini "Özel olanı sırayla olan olabilir. [birinci şekilden bahsediyor] Çünkü sırayla dizilmiş." ifadesiyle açıkladığı görülmüştür. Hazal'ın Problem 2'nin çözümüne yönelik çizimi Resim 3'de verilmiştir. Bununla birlikte 1'den 7'ye kadar olan sayıları da bu özelliğe uyacağını Resim 3'te görüldüğü gibi V şeklini çizerek gösterdiği belirlendiğinden, genelleme sürecinin başlangıç düzeyine dair bir gösterge olarak yorumlanmıştır.

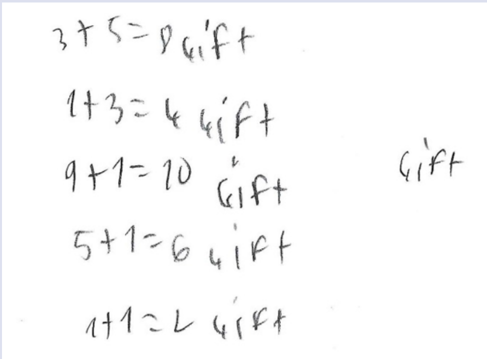
Katılımcıların yanıtları incelendiğinde 6 katılımcıdan 5'inin (Emir, Elif, Beren, Hazal, Alperen) ortaya koyduğu yanıtlar genelleme sürecinin belirgin değil düzeyinde göstergeler içermektedir. Örneğin Emir'in Problem 3 kapsamında toplamları 19 olan üç doğal sayının çarpımlarının alabileceği en büyük değeri araştırırken, probleme ait bir örüntü ya da kural keşfedemediği ve verilen durum için rastgele gerçekler ortaya attığı görülmüştür. Bu eylemler, genelleme sürecinin belirgin değil düzeyine ait bir gösterge olarak değerlendirilmiştir.

Gerekçelendirme Süreci

Elde edilen verilere göre 6 katılımcının 3'ünün (Aras, Emir, Elif) ortaya koyduğu yanıtlar gerekçelendirme sürecinin genişleten düzeyine ait göstergeler içermektedir. Örneğin Aras Problem 3'de en büyük olması için sayı üçlülerini birbirine en yakın olacak şekilde seçmesi gerektiği bilgisini hatırladığı görülmüştür. Sonrasında bu mantıksal argümana dayanarak problemin devamında, sayıları en büyük sonucu verecek şekilde seçtiği görüldüğünden, gerekçelendirme sürecinin genişleten düzeyine dair gösterge olarak değerlendirilmiştir.

Resim 3. Hazal'ın Problem 2'de yer alan çizimi

Resim 4. Aras'ın Problem 5'de yer alan çizimi



Resim 5. Alperen'in Problem 7'de yer alan işlemleri

Katılımcıların yanıtları incelendiğinde 6 katılımcının 2'sinin (Aras ve Emir) söylemleri sağlamlaştıran düzeyinde göstergeler içermektedir. Örneğin Aras'ın sağlamlaştıran düzeyde gerekçelendirme yaptığı Problem 5'e ait bir söylemi şöyledir: "4×4×4'te bir dakika bakmam lazım. 4 taneyse 24 olur, 24 tanesinin 1 yüzü boyanıyor, 2 yüzü boyananların sayısı, yüzü boyanmayanların sayısı.. Şimdi yüzü boyanmayanların sayısını bulmak için [göstererek] buradan içeriye doğru 4 tane gidecek. 4 tane 2ye 2den..bir dakika.. 4 tanesinin yüzü boyanmıyor. Bir dakika son kez bir kontrol edeyim şimdi burada 4 tane var. İçe doğru gideceği için 2 tanesi boyanmayacak, buradan da 2 tanesi boyanmayınca 4 tanesi boyanmıyor. Zaten demişim." Aras'ın Problem 5'in çözümüne yönelik yapmış olduğu çizim Resim 4'de verilmiştir.

Aras Resim 4'de görüleceği gibi ilk önce 4×4×4 birimlik küpte 2 yüzü boyanacak küpleri bulmak için küpün bir yüzüne ait şekil çizmiştir. Ardından bulduğu sonucu doğrulamak amacıyla çizdiği şekli genişleterek küpün ikinci yüzünü çizdiği görüldüğünden, Aras'ın bu eylemleri gerekçelendirme sürecinin sağlamlaştıran düzeyinde değerlendirilmiştir.

Probleme verilen yanıtlar incelendiğinde 6 katılımcının 5'inde (Aras, Emir, Elif, Beren, Alperen) gelişmekte olan düzeye dair göstergeler görülmüştür. Örneğin Alperen Problem 7 bağlamındaki akıl yürütmesi şöyledir: "Hocam şimdi bunları deneyelim, 3 tek ise 5 de tekse hocam 6,7, 8.. bu da çift oluyor hocam. 1 ile de 3'ü toplarsak hocam 4 olur bu da çift oluyor hocam. Ondan sonra hocam 9 da bir tek sayı 1 de bir tek sayı olduğundan dolayı hocam 10 oluyor, bu da çift oluyor hocam. Son 2 tane daha deneme yapayım hocam ondan sonra 5 ile 1'i toplarsam 6 ediyor bu da çift ediyor hocam, ondan sonra 1+1 de hocam 2 ediyor bu da çift ediyor hocam. Yani hepsi çift aslında hocam. İki tek sayının toplamı hocam çifttir." Resim 5'de Alperen'in Problem 7'nin çözümüne yönelik işlemleri yer almaktadır.

Alperen'in bu çözümüne bakıldığında iki tek sayının toplamının çift bir sayı olacağı varsayımını test etmek için birçok örnek verdiği görüldüğünden, gerekçelendirme sürecinin gelişmekte olan düzeyinde bir akıl yürütme olarak değerlendirilmiştir.

Araştırmada 6 katılımcıdan 4'ünün (Elif, Beren, Hazal, Alperen) gerekçelendirme sürecinin başlangıç düzeyinde göstergeler ortaya koyduğu belirlenmiştir. Örneğin Beren Problem 1'de yer alan yamuk masaların birleştiği durumda oturabilecek çocuk sayısına dair verdiği yanıtın doğruluğunu görmek için yalnızca çizim yapmıştır. Beren'in bu eylemi materyalleri kullanarak neyin doğru olduğunu fark ettiği şeklinde yorumlandığından, gerekçelendirme sürecinin başlangıç düzeyine ait bir gösterge olarak değerlendirilmiştir.

Gerekçelendirme sürecinin belirgin değil düzeyine dair bulgular, 6 katılımcıdan 5'inin (Emir, Elif, Beren, Hazal, Alperen) ortaya koyduğu yanıtlarda görülmüştür. Örneğin Hazal'ın Problem 3'te toplamları 19 olan üç sayının çarpımlarının alabileceği en büyük değeri araştırırken çarpımlarını 57 bulduğu görülmüştür. Ardından Hazal'ın birinci araştırmacıya yönelttiği "Yine 57 olmaz mı? Çünkü tam sayı demiş, bence yine 57 olur." ifadesine bakıldığında gerekçelendirmek amacıyla öğretmene başvurduğu görüldüğünden, belirgin değil düzeyinde bir eylem olarak yorumlanmıştır.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Araştırmada ortaokul öğrencilerini matematiksel akıl yürütme süreçleri incelenirken, Loong vd. (2018) ve Herbert vd. (2022) tarafından geliştirilen göstergeler kullanılmıştır. İlgili göstergeler, araştırmada elde edilen ham verilerin analiz etme, genelleme ve gerekçelendirme süreçleri bağlamında kodlanmasına açık ve anlaşılır bir yön çizebilmiştir. Bu anlamda öğretmenler matematik derslerinde süreç becerileri arasında yer alan akıl yürütmeyi (MEB, 2013) değerlendirirken, geliştirilen göstergelerin (Çizelge 1) yararlı olacağı düşünülmektedir. Ayrıca ilgili göstergeler arasında yer almayan ancak bu araştırmada akıl yürütme süreçlerinden analiz etme sürecinin genişleten düzeyinde değerlendirilen sadece bir eylem ile yani “ortak bir özelliği fark etme amacıyla geçmiş bilgiyi anımsamak” ile karşılaşılmıştır (Vale vd., 2017). Dolayısıyla bu araştırmada kullanılan matematiksel problemlerin, akıl yürütmeye dair göstergelerin çeşitlendirilmesine katkıda bulunduğu ileri sürülebilir. Ayrıca matematiksel akıl yürütme süreçleri değerlendirme kriterlerinde genelleme ve gerekçelendirme süreçlerine ait sağlamlaştıran ve genişleten düzeylerinin birbirinden ayrıştırılmasının zor olduğu veri analizi sırasında görülmüştür.

Araştırmada katılımcıların analiz etme, genelleme ve gerekçelendirme matematiksel akıl yürütme süreçlerinin tamamını çok çeşitli düzeylerde sergiledikleri sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca matematiksel problemlerin yapısının akıl yürütme süreçlerinin ortaya çıkmasında etkili olduğunu görülmüştür. Özellikle Problem 7 matematiksel akıl yürütme süreçleri ve düzeyleri açısından akademik başarısı yüksek, orta ve düşük olarak nitelendirilen öğrencileri en çok ayrıştıran problem olmuştur. Ayrıca araştırmada matematiksel akıl yürütme süreçlerinin ve düzeylerinin oldukça az gözlemlendiği problemler de yer almaktadır. Örneğin Problem 5’te Aras dışında hiçbir öğrenci problemi anlayamamış ve çözmeye çalıştıklarında da başlangıç düzeyinin üzerinde akıl yürütmeler ortaya koyamamıştır. Bu durumun problemin metninde görsel öğelere yer verilmemesinden kaynaklanmış olabilir. Bununla birlikte bazı problemlerde (örneğin Problem 1 ve Problem 6) tüm katılımcıların akıl yürütmeleri belirgin değil düzeyinin üzerinde olacak şekilde ve çok çeşitli düzeylerde sergilendiği görülmüştür. Bu durumun bahsedilen problemlerin öğrencilerin öğrenme ortamlarında sıkça karşılaştıkları problem türlerine olan benzerliği ile ilişkili olduğu düşünülmektedir.

Ellis (2007) ve Vale vd. (2017) ortak özellikleri aramak için kolayca fark edilen özelliklerin ötesine geçme eyleminin, karşılaştırma ve kıyaslama oluştururken üst düzey akıl yürütmeye örnek olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmada da analiz etme süreci göz önüne alındığında, araştırmada akademik başarısı düşük olarak nitelendirilen öğrencilerin çoğu zaman kolayca fark edilebilecek ortak özelliklere odaklandığı, akademik başarısı yüksek olarak nitelendirilen öğrencilerin ise hemen fark edilemeyecek ortak ve farklı özelliklere odaklandığı görülmüştür. Araştırmanın bulgularından elde edilen önemli sonuçlardan biri de analiz etme sürecinde öğrencilerin birçoğunun akıl yürütme düzeyleri diğer süreçlerdeki akıl yürütme düzeylerini belirler konumda olduğudur. Yani katılımcılar bir problemde analiz etme süreci için hangi düzeyde eylemlerde bulunuyorsa, sonraki akıl yürütme süreçlerinde de (genelleme ve gerekçelendirme) çoğunlukla ilgili düzeyin üstüne çıkamadıkları görülmüştür. Örneğin akademik başarısı yüksek olarak nitelendirilen Emir Problem 6’da, akademik başarısı orta olarak nitelendirilen Elif ise Problem 1’de genişleten düzeyden gelişmekte olan düzeyine doğru değişen yanıtlar vermiştir (bakınız Çizelge 1). Bahsedilen bu sonuç, matematiksel akıl yürütme süreçlerinin birbiri ile ilişkili doğasını açığa çıkarmaktadır. Yine bu sonucun genellemenin, analiz etme sürecinin üzerine inşa edilen bir süreç olduğu (Bragg & Herbert, 2018) fikri ile de örtüştüğü düşünülmektedir.

Ellis (2007) öğrencilerin genellemelerini açıklamaya çalıştıkça genelleme eylemlerini yeniden gözden geçirebildiklerini ve baştaki genellemelerinin üzerine inşa ederek daha güçlü genellemeler ortaya attığını belirtmiştir. Benzer şekilde araştırmamızda elde edilen bulgulardan biri de bazı katılımcıların sayı örüntülerine ait örüntü kuralını bulduktan sonra, kuralı nasıl bulduklarını açıklarken hatalarını fark etmeleri olmuştur. Katılımcıların sonrasında daha doğru genellemeler ortaya attıkları görülmüştür. Diğer taraftan özellikle akademik başarısı düşük olarak nitelendirilen öğrencilerin genel olarak problemlerde yer alan örüntü ve ilişkileri anlamalarına rağmen, bu örüntü ve ilişkileri yalnızca tekrarladıkları, cebirsel sembollerle genişletemedikleri görülmüştür. Bu durumun öğrencilerin değişken kavramı ile ilgili algılarında sıkıntılar olabileceği (Girit & Akyüz, 2016) ve öğrencilerin örüntüye ait herhangi bir terimi bulmada ve örüntü genellemesine ilişkin bağıntıyı bulmada düşük başarı gösterebileceği (Yakut Çayir & Akyüz, 2015) görüşlerini destekler konumda olduğu düşünülmektedir.

Genelleme sürecinde akademik başarısı yüksek öğrencilerin genişleten ve sağlamlaştıran düzeyde genelleme yaptığı problemlerde (örneğin Problem 1 ve Problem 3) akademik başarısı orta ve düşük olan öğrencilerin daha düşük düzeylerde genelleme yaptıkları da görülmüştür. Bu sonuç Peker (2020) tarafından yapılan çalışmada elde edilen genelleme sürecindeki düşünme süreçlerinin akademik başarıya göre farklılık gösterdiği sonucuyla paralellik göstermektedir. Bu anlamda akademik başarısı yüksek öğrencilerin genelleme sürecine ait düzeylerinin diğer katılımcıların genelleme süreci düzeylerine göre daha belirgin bir şekilde ayrıştığı söylenebilir. Bu tespite aykırı olan sadece bir durum ile karşılaşılmıştır. Örneğin Elif, Problem 8’de akademik başarısı yüksek olarak nitelendirilen öğrencilerden daha üst düzey olan genişleten düzeyde genelleme yaptığı görülmüştür. Elif’in ilgili problem türü ile daha önce karşılaşmış olabileceği için bu düzeyde eylemde bulunduğu düşünülmektedir.

Ellis (2007) bir öğrencinin gerekçelendirme sürecinde daha genel bir argüman oluşturma şansının problemdeki nicel ilişkilere odaklanarak genelleme yapmasıyla ilişkili olabileceğini ifade etmiştir. Lannin (2005) de genelleme ve gerekçelendirmenin yakından ilişkili olduğunu vurgulamıştır. Araştırmamızda da ilgili araştırmacıların söylemleriyle örtüşen sonuçlara ulaşılmıştır. Örneğin özellikle örüntüye ya da ortak bir özelliğe ait kuralı ortaya atmak için sayısal artış azalış miktarlarına odaklanan katılımcıların (Aras, Emir), genellemelerini daha ileri düzeylerde yaptığı ve bu durumun da ilgili katılımcıların üst düzey gerekçelendirme yapabilmelerine yol açtığı görülmüştür. Bununla ilişkili olarak karşılaştıkları problemlerin sayısal ilişkileri yerine görsel şekillerine odaklanan katılımcıların ise hem genelleme sürecinde hem de gerekçelendirme sürecinde daha düşük düzeylere ait eylemler sergiledikleri görülmüştür. Örneğin akademik başarısı orta olarak nitelendirilen Beren, masaların yan yana geldiği duruma ait görseli çizerek yanıtladığı Problem 1'de görsele odaklanarak sayısal ilişkileri fark edememesi nedeniyle genelleme ve gerekçelendirme süreçlerinde başlangıç düzeyinde eylemler sergilediği görülmüştür.

Loong vd. (2018) de bir varsayımı doğrulamak için örnekleri kullanmayı gelişmekte olan düzeyinde sınıflandırmıştır. Yapılan bu araştırmada katılımcıların neredeyse tamamı birçok problemde mantıksal bir argüman kullanarak gerekçelendirme yapmak yerine bir varsayımı doğrulamak için örnekleri kullanmıştır. Coe & Ruthven (1994) öğrencilerin bir örüntüyü veya kuralı genelleştirebilseler bile, çoğunluğun ilgili nedeni açıklayamadığını belirtmiştir. Bu durumun araştırmada bazı katılımcıların analiz etme ve genelleme süreçlerinde üst düzeylerde akıl yürütmeler sergilemiş olmalarına rağmen gerekçelendirme sürecinde daha alt düzeylerde akıl yürütme ortaya koymalarıyla paralellik gösterdiği düşünülmektedir. Örneğin akademik başarısı orta olarak belirlenen Elif, analiz etme sürecinde dört probleme (Problem 1, Problem 4, Problem 6 ve Problem 8), genelleme sürecinde ise üç probleme (Problem 4, Problem 6 ve Problem 8) genişleten düzeyde yanıtlar verebilmişken, gerekçelendirme sürecinde yalnızca bir problemde (Problem 6) genişleten düzeyde eylemler ortaya koymuştur. Yine bu sonucun katılımcıların yalnızca bazı sayısal ifadelere odaklanması nedeniyle genellemelerini gerekçelendiremediği (Lannin, 2005) görüşü ile de ilişkili olduğu düşünülmektedir. Ayrıca bu sonucun bir nedeninin de matematik öğretim programında (MEB, 2018) da gerekçelendirme sürecine yeterince yer verilmemesi olduğu da ileri sürülebilir.

Problem çözme sürecinde gerekçelendirme yapmaları için ek bir müdahalede bulunulmadığı için katılımcıların gerekçelendirme yap(a)mamış olabileceği literatürde yapılan çalışmaları destekler nitelikte olduğu düşünülmektedir (Lannin, 2005; Mata-Pereira & Ponte, 2017). Bu durumun ilgili çalışmaların öğretmenlerin gerekçelendirme sürecinde öğrencileri destekleyen, yönlendiren eylemlerinin öğrencilerin gerekçelendirmelerini olumlu yönde etkilediği ve gerekçelendirmelerini daha ileri yani üst düzeylere taşıdığı iddiası ile ilişkili olabilir. Araştırmada elde edilen gerekçelendirme sürecine dair bulgularda, bu bahsedilen iddialardan farklı olan durumlar ile de karşılaşılmıştır. Örneğin Aras'ın Problem 5'e verdiği yanıtlara bakıldığında problemi çözerken sürekli olarak yaptığı işlemlerin doğruluğunu ve problemin devamında yapacağı işlemleri sorgulaması, kendi kendine konuşması üst bilişsel davranışlar olarak değerlendirilmiştir (Carpenter vd., 2003; Desoete vd., 2001). Bu durum da matematiksel akıl yürütme ile üst biliş becerilerinin yakından ilişkili (Artzt & Armour-Thomas, 1992; Desoete vd., 2001; Schoenfeld, 1992; Schraw, 1998) olması görüşünü desteklediği düşünülmektedir.

Bu çalışmada gerekçelendirme sürecinde hiçbir katılımcının aksine örnek vermediği görülmüştür. Bu sonuç aksine örnek vererek bir iddiayı çürütme eyleminin daha üst düzey bir gerekçelendirme eylemi olması ile ilişkili olabilir (Widjaja & Vale, 2021). Bir diğer neden de katılımcıların bulundukları öğrenme ortamlarında aksine örnek verme deneyimleri edinmemesi olabilir.

Öğretmenler matematik derslerinde süreç becerileri arasında yer alan akıl yürütmeyi (MEB, 2013) değerlendirirken, bu araştırmada kullanılan matematiksel akıl yürütme göstergelerini kullanabilirler. Araştırmamızda katılımcıların özelikle gerekçelendirme sürecinin daha üst düzeylerini ortaya koyamadığının görülmesi nedeniyle öğretmenlerin matematik derslerinde gerekçelendirme eylemlerini güçlendirecek çalışmalarda bulunmasının etkili olabileceği düşünülmektedir. Matematiksel akıl yürütmenin ortaya çıkarılmasında seçilen matematiksel problem durumlarının yapısının önemi, araştırmamızda ortaya çıkan sonuçlardan birisidir. Dolayısıyla matematik öğretmenlerinin ve sonraki araştırmacıların matematiksel akıl yürütme süreçlerini daha fazla ortaya çıkarabilecek problem durumlarına da odaklanmasının önemli olduğu söylenebilir. Daha sonraki araştırmalarda bir yerine daha çok görüşme yapılarak matematiksel akıl yürütme eylemlerinin nasıl ortaya çıktığına dair yapılabilecek araştırmalar önerilmektedir. Bundan sonra yapılacak araştırmalarda odak grup görüşmeleri yapılabilir. Grup çalışmaları etkileşimi arttırabileceğinden, bu tür araştırmalarda öğrencilerin birbirlerinin akıl yürütmelerini nasıl etkileyebileceği de gözlemlenebilir. Akademik başarısı yüksek olarak değerlendirilen katılımcılar ile yapılan görüşmelerde matematiksel akıl yürütme süreçleri değerlendirme göstergelerinin dışına çıkan eylemler ile karşılaşılmıştır. Bundan sonraki araştırmalarda akademik başarısı yüksek olarak değerlendirilen öğrenciler ile çalışılarak matematiksel akıl yürütme süreçleri değerlendirme göstergeleri güncellenip geliştirilebilir. Araştırmada sesli düşünme tekniği kullanıldığından katılımcılarla etkileşimde bulunulmamıştır. Bu anlamda daha sonraki araştırmalarda klinik görüşmeler yapılarak akıl yürütme eylemleri nedenleri ile birlikte daha derinlemesine ortaya çıkarılabilir.

Extended Abstract

Introduction

Mathematics inherently includes discovering patterns, reasoning, making predictions and justification while addressing many subjects in areas such as numbers, algebra and geometry (Umay, 2003). Swan (2011) emphasised that reasoning in mathematics lessons should be made visible and audible through written and oral explanations. Students often use reasoning when they cannot immediately solve a problem and when a problem challenges them (Lampert, 2001). Therefore, to reveal mathematical reasoning, students should be presented with problems that will reveal mathematical reasoning processes. Understanding how students think and make inferences when dealing with a mathematical problem can give educators various clues about how their learning occurs (Yeşildere & Türnüklü, 2007). In this manner, it is important to focus on the process aspect of mathematical reasoning. Therefore, revealing the various reasoning processes of middle school students while solving problems could help mathematics teachers to examine in depth and interpret the mathematical reasoning processes that occur in learning environments. In this context, the problem of the research is "How are the mathematical reasoning processes (analysing, generalising, justifying) of the 7th grade students in the context of mathematical problems?".

Method

This study adopted phenomenological research design (Yıldırım & Şimşek, 2018). Students' mathematical reasoning was determined as the phenomenon of this study. The participants of the research were determined by the maximum diversity sampling method, one of the purposeful sampling methods, in the 2021-2022 academic year, consisting of six 7th grade students studying in a big city in the Central Anatolia Region. In order to reveal the mathematical reasoning processes of the students, 8 mathematical problems determined in the light of the literature and finalized by pilot interviews were used. Data were collected through individual interviews with each participant and these videotaped interviews lasted about 20 minutes These collected data were analysed using the descriptive analysis method, along with relevant literature.

Results

In the study, the indicators developed by Loong et al. (2018) and Herbert et al. (2022) were used to analyse the mathematical reasoning processes of middle school students. These indicators provided a clear and understandable direction for the coding of the raw data related to analysing, generalising and justifying processes. One of the results was that the participants exhibited all of the mathematical reasoning processes of analysing, generalising and justifying at various levels. It was also found that the structure of the mathematical problems has a role in revealing the reasoning processes.

Discussion

It was observed that whatever level of actions the participants took for the analysing process in a problem, they mostly could not go above the relevant level in the subsequent reasoning processes which are generalisation and justification. This finding is in line with the idea that generalisation is a process built on the analysing process (Bragg & Herbert, 2018).

In the generalisation process, it was also observed that students with high academic achievement generalised at expanding and consolidating levels (e.g. Problem 1 and Problem 3), while students with medium and low academic achievement generalised at lower levels. This result is in parallel with the result obtained in the study conducted by Peker (2020) that the thinking processes in the generalisation process differ according to academic achievement.

In this study, almost all of the participants used examples to justify an assumption instead of justifying using a logical argument in most problems. Coe and Ruthven (1994) found that even when students can generalise a pattern or rule, the majority of them cannot explain the reason for it. This situation is thought to be parallel to the fact that some participants in the study showed higher levels of reasoning in the analysis and generalisation processes, but lower levels of reasoning in the justification process. This situation is thought to explain the fact that some participants in the study exhibited higher levels of reasoning in the analysing and generalising processes, but showed lower levels of reasoning in the justification process.

Pedagogical Implications

In our study it was observed that the participants were not able to reveal higher levels of the justification process. It is therefore suggested that it may be effective for teachers to strengthen justification actions in mathematics classrooms. The importance of the structure of the mathematical problem in revealing mathematical reasoning is one of the findings of our research. Therefore, it is important for mathematics teachers and future researchers to focus on mathematical problems that can reveal mathematical reasoning processes. In future research, focus group interviews can be used. As group studies can increase interaction, such studies can also observe how students can influence each other's thinking. In future studies, the indicators for the assessment of mathematical reasoning processes can be updated and improved by working with students whose academic performance is assessed as high.

Araştırmanın Etik Taahhüt Metni

Yapılan bu çalışmada bilimsel, etik ve alıntı kurallarına uyulduğu; toplanan veriler üzerinde herhangi bir tahrifatın yapılmadığı, karşılaşılacak tüm etik ihlallerde “Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi ve Editörünün” hiçbir sorumluluğunun olmadığı, tüm sorumluluğun Sorumlu Yazara ait olduğu ve bu çalışmanın herhangi başka bir akademik yayın ortamına değerlendirme için gönderilmemiş olduğu sorumlu yazar tarafından taahhüt edilmiştir.

Kaynaklar

Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction, 9*(2), 137–175. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0902_3

Bragg, L. A., & Herbert, S. (2018). What can be learned from teachers assessing mathematical reasoning: A case study. In J. Hunter, P. Perger, & L. Darragh (Eds.), *Making waves, opening spaces: Proceedings of the 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 178–185). Auckland: MERGA.

Bragg, L. A., Vale, C., Herbert, S., Loong, E., Widjaja, W., Williams, G. & Mousley, J. (2013). Promoting awareness of reasoning in the primary mathematics classroom. In A. McDonough, A. Downton, & L. A. Bragg (Eds.), *Mathematics of the planet earth: Proceedings of the MAV 50th annual conference* (pp. 23–30). Melbourne: Mathematical Association of Victoria.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41–53. https://doi.org/10.1080/0141192940200105

Desoete, A., Roeyers, H., & Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem solving in grade 3. *Journal of Learning Disability*, *34*(5), 435–449. https://doi.org/10.1177/002221940103400

Ellis, A. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194–22. https://doi.org/10.2307/30034866

Ericsson, K. A. (2006). Protocol analysis and expert thought: Concurrent verbalizations of thinking during experts' performance on representative task. In K. A. Ericsson, N. Charness, P. Feltovich, & R. R. Hoffman, R. R. (Eds.). *Cambridge handbook of expertise and expert performance* (pp. 223–242). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Francisco, J., & Maher, C.A. (2011). Teachers attending to students' mathematical reasoning: Lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 49–66. https://doi.org/10.1007/s10857-010-9144-x

Girit, D. & Akyüz, D. (2016). Farklı sınıf seviyelerindeki ortaokul öğrencilerinde cebirsel düşünme: Örüntülerde genelleme hakkındaki algıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 10(*2), 243–272. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.277815

Herbert, S. & Williams, G. (2023). Eliciting mathematical reasoning during early primary problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, *35*, 77–103. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00376-9

Herbert, S. & Bragg, L. A. (2021). Elementary teachers' planning for mathematical reasoning through peer learning teams. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *22*(1), 24–43. https://doi.org/10.4256/ijmtl.v22i1.291

Herbert, S., Vale, C., White, P., & Bragg, L. A. (2022). Engagement with a formative assessment rubric: A case of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research*, *111*, 101899. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2021.101899

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8.* Reston: NCTM.

Loong, E., Vale, C., Widjaja, W., Herbert, E.S., Bragg, L. & Davidson, A. (2018). Developing a rubric for assessing mathematical reasoning: A design-based research study in primary classrooms*.* In J. Hunter, P. Perger, & L. Darragh (Eds.), *Making waves, opening spaces: Proceedings of the 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 503–510). Auckland: MERGA.

Mason, J. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169–186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

Meyer, M. (2010). Abduction–A logical view for investigating and initiating processes of discovering mathematical coherences. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 185–205. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9233-x

Miles, M, B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2013). *Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2018). *Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods.* (3rd Edition). USA: Sage.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23–41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Peker, S. (2020). *Ortaöğretim öğrencilerinin genelleme becerilerinin incelenmesi*. [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Sivas Cumhuriyet Üniversitesi.

Reid, D. A. (2003). Forms and uses of abduction*. In M. A. Mariotti (Ed.). Proceedings of 3rd Conference of European Societyfor Research in Mathematics Education (pp.1–10). Bellaria: CERME.*

Rivera, F. D. (2008). On the pitfalls of abduction: Complicities and complexities in patterning activity. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 17–25. https://www.jstor.org/stable/40248593

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science*, *26*(1–2), 113–125. https://doi.org/10.1023/A:1003044231033

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 1–20. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9–16.

Swan, M. (2011). *Improving reasoning: Analysing alternative approaches*. http://nrich.maths.org/7812/index sayfasından erişilmiştir.

Toulmin, S. E. (2007). *The uses of argument.* New York: Cambridge University.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24,* 234–243.

Umay, A. & Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 28*, 188–195.

Vale, C., Widjaja, W., Herbert, S., Bragg, L. A., & Loong, E. Y. K. (2017). Mapping variation in children's mathematical reasoning: The case of 'what else belongs?'. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(5), 873–894. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9725-y

Yakut Çayir, M. & Akyüz, G. (2015). 9. sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözme stratejilerinin belirlenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi,* *9*(2), 205–229. https://doi.org/10.17522/nefefmed.66921

Yeşildere, S. & Türnüklü, E. B. (2007). Examination of students' mathematical thinking and reasoning processes. Ankara University *Journal of Faculty of Educational Sciences (JFES),40* (1), 181–213. https://doi.org/10.1501/Egifak_0000000156

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2018). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (11. Baskı). Ankara: Seçkin.

Widjaja, W., & Vale, C. (2021). Counterexamples: Challenges faced by elementary students when testing a conjecture about the relationship between perimeter and area. *Journal on Mathematics Education,* *12*(3), 487–506. https://doi.org/10.22342/jme.12.3.14526.487-506

Widjaja, W., Vale, C., Herbert, S., Loong, E. Y., & Bragg, L. A. (2021). Linking comparing and contrasting, generalising and justifying: A case study of primary students' levels of justifying. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(2), 321–343. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00306-w

Ek-1

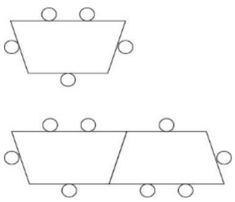
Problemler

Problem 1:

Yamuk şeklindeki bir masada 5 çocuk oturabiliyor. İki masa uç uca eklenirse toplamda 8 çocuk oturabiliyor.

Masa 1

Masa 2



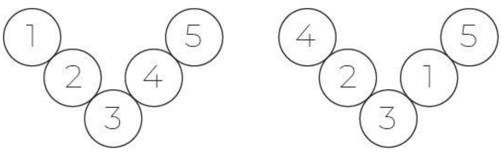
Buna göre;

(a) 3 masada kaç çocuk oturabilir?

(b) 10 masada kaç çocuk oturabilir?

Problem 2:

Dairelerin içerisine 1'den 5'e kadar olan sayılar aşağıdaki şekilde yerleştirilerek yönergedeki sorular öğrencilere yöneltilir:



(a) Yukarıdaki V' lerdeki sayıların benzer özellikleri neler olabilir? Açıklayınız.

(b) Yukarıdaki V' lerdeki sayıların farklı özellikleri neler olabilir? Açıklayınız.

(c) Yukarıdaki V' lerden özel olanı hangisi olabilir ve neden?

(d) Özel olan V' yi farklı sayılarla nasıl oluşturabiliriz?

(e) Özel V'yi 1' den 7' ye kadar olan sayılarla da oluşturabilir miyiz?

Problem 3:

Toplamları 19 olan;

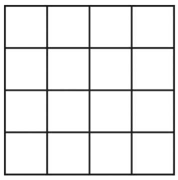
-- üç doğal sayının çarpımlarının en büyüğünün ne olabileceğini araştırınız.

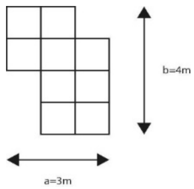
--bu üç doğal sayı tam sayı olduğunda çarpımlarının en büyüğü ile ilgili neler söyleyebilirsiniz. İnceleyeniz.

Problem 4:

Ali Usta, farklı şekillerde havuz(göletlerin) inşa eden bir bahçecilik merkezinde çalışmaktadır. Görevi, bahçelerdeki havuzların(göletlerin) çevresini dolaşmak için kullanılan karo sayısını belirleyip müşterilere bu sayıyı tavsiye etmektir. Aşağıdaki durumlarda Ali ustanın yerine müşterilere siz cevap vermeye çalışınız:

a) 4 m × 4 m boyutundaki havuzların (göletlerin) etrafındaki yol için kaç tane karo (1 m × 1 m) gereklidir? (Şekil 1)
b) Kare şeklindeki bir havuz (göletin) için gerekli olan karo sayısını hesaplamada kullanılacak bir formül oluşturmaya çalışınız. Oluştururken neleri göz önüne aldığınızı paylaşınız.
c) Havuzun (göletin) görüntüsünün Şekil 2' deki gibi düzensiz olması durumunda karo sayısını belirlemede kullanabileceğiniz bir formül oluşturmaya çalışınız. Daha sonra da bu formülün karo sayısını hesaplamada niye çalıştığını açıklayınız.





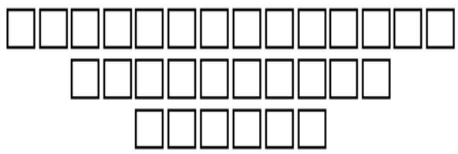
Şekil 1: 4m x 4m kare gölet   Şekil 2: Düzensiz gölet

Problem 5:

27 küçük küpten (3 x 3 x 3) oluşan bir küp oluşturulmuş ve bu küp boyaya batırılmıştır. Küçük küplerden bazılarının boyandığını görecekseniz hangi küplerin 3 yüzü, hangi küplerin 2 yüzü, hangi küplerin 1 yüzü ve son olarak boyalı yüze sahip olmayan küplerin sayısını belirlemeye çalışınız. Belirlerken kullandığınız stratejiler varsa açıklayınız. Sonra
--3 x 3 x 3 küp için bu durumu izometrik kâğıtta gösteriniz.
--Aynı işlemi; 2 x 2 x 2, 4 x 4 x 4, 10 x 10 x 10 vb. küpleri için tekrarlayınız. Görebildiğiniz bir sayı örüntüsü varsa paylaşınız.

Problem 6:

Bir tiyatroda koltukların ilk üç sırası aşağıdaki şekildeki gibi yerleştirilmiştir ve toplamda 20 sıra bulunmaktadır.



a) 5. sırada kaç koltuk vardır? Peki ya 8. sırada? Bunları nasıl belirlediğinizi açıklayınız.
b) Tiyatronun 11. sırasında kaç koltuk vardır? Bunu nasıl belirlediğinizi açıklayınız.
c) Hangi sırada 62 koltuk olurdu? Bunu nasıl belirlediğinizi açıklayınız.
d) İlk üç şıktaki cevaplarınızı göz önüne alarak, herhangi bir sıradaki koltuk sayısını hesaplamada kullanacağınız bir formül öneriniz (sayı örüntüsü kuralı) ve bu formülün niçin işe yarayacağını açıklayınız.

Problem 7:

İki tek sayının toplamı tek mi yoksa çift midir? Cevabınızı ayrıntılı olarak açıklayınız.

Problem 8:

Bir bisiklette biri 12 diğeri 8 dişe sahip iki dişli bulunmaktadır. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız:

a. Küçük dişli belirli sayıda döndürüldüğünde, büyük dişli daha az mı, daha fazla mı, yoksa aynı sayıda mı döner? Düşüncelerinizi paylaşınız.
b. Küçük dişlinin devir sayısını, büyük dişlinin devir sayısını ayrı ayrı belirlemenin bir yolunu bulunuz ve bu yolu açıklayınız. Daha sonra da ikisininkini aynı anda belirlemenin bir yolu olduğunu düşünüyorsanız bu yolu da açıklayınız?