Cumhuriyet International Journal of Education, 11(4): 587-603, 2022
DOI: https://dx.doi.org/10.30703/cije.1072163

Cumhuriyet International Journal of Education

| cije.cumhuriyet.edu.tr | Founded: 2011 Available online, ISSN: 2147-1606 Publisher: Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Examination of the Arguments in the Process of Calculating the Surface Area of the Solids of Revolution[#]

Ayşe Tekin Dede[1,*], Ali Özgün Özer[2], Esra Bukova Güzel[1]

[1]*Buca Faculty of Education, Dokuz Eylul University, Izmir, Türkiye*
[2] *Institute of Educational Sciences, Dokuz Eylul University, Izmir, Türkiye*
**Corresponding author*

Research Article

Acknowledgment
[#]This work was supported by Research Fund of the Dokuz Eylul University. Project Number: 2018.KB.EGT.008

History
Received: 11/02/2022
Accepted: 03/11/2022

iThenticate
This paper was checked for plagiarism using iThenticate during the preview process and before publication.

ABSTRACT

In the study, it is aimed to examine the collective arguments of students in the process of constructing a model to calculate the surface area of the solids of revolution in the Calculus I course. The participants of the study, which was designed as a case study, were forty-two students enrolled in Calculus I course in the elementary mathematics teaching department. The data consisted of the video recordings of the argumentation process and the observation notes of the researcher during the construction of the surface area model of the solids of revolution. By analysing the data, Toulmin argumentation schemes containing the components of the argumentation process were created. The findings of the study revealed that the students actively participated in the argumentation process by justifying and refuting each other's claims. In this active participation, the actions of the researcher who conducted the course to support the argumentation process, the students' pre-learning and the norms in the classroom were effective. Data, claim, warrant and rebuttal components emerged from the components of the argumentation process. Particularly, it was a remarkable finding that the students put forward rebuttals by listening to each other's explanations carefully and that these rebuttals were justifications for the subsequent arguments. Another task of the rebuttals was to invalidate not only the claim but also, in some cases, the sub-arguments containing data, claim and justification. In addition, it was understood that the students expressed their justifications with the researcher's questioning in the transition from the data to the claim. In addition to all these, it was seen that the participants did not express backings or qualifiers in the argumentation process.

Keywords: Argumentation, calculus, solid of revolution, surface area, components of the argumentation process

Dönel Cisimlerin Yüzey Alanının Hesaplanması Sürecindeki Argümanların İncelenmesi

Bilgi
 # "Bu çalışma Dokuz Eylül Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince desteklenmiştir. Proje Numarası: 2018.KB.EGT.008
**Sorumlu yazar*

Süreç
Geliş: 11/02/2022
Kabul: 03/11/2022

Bu çalışma ön inceleme sürecinde ve yayımlanmadan önce iThenticate yazılımı ile taranmıştır.

ÖZ

Çalışmada Analiz I dersinde dönel cisimlerin yüzey alanını hesaplamayı sağlayacak modelin oluşturulması sürecinde ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ortaklaşa argümanlarının incelenmesi amaçlanmaktadır. Durum çalışması olarak desenlenen çalışmanın katılımcıları Analiz I dersine kayıtlı kırk iki ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencileridir. Veriler dönel cisimlerin yüzey alanı modelinin oluşturulması esnasındaki argümantasyon sürecinin video kayıtları ile araştırmacının gözlem notlarından oluşmaktadır. Veriler analiz edilerek argümantasyon sürecinin bileşenlerini içeren Toulmin argümantasyon şemaları oluşturulmuştur. Çalışmanın bulguları öğrencilerin birbirlerinin iddialarına gerekçe sunarak ve bu iddiaları çürüterek argümantasyon sürecine aktif katılım sağladıklarını ortaya koymaktadır. Bu aktif katılımda dersi yürüten araştırmacının argümantasyon sürecini destekleyici eylemleri, öğrencilerin ön öğrenmeleri ve sınıf içindeki normlar etkili olmuştur. Argümantasyon sürecinin bileşenlerinden veri, iddia, gerekçe ve çürütücü bileşenleri ortaya çıkmıştır. Özellikle öğrencilerin birbirlerinin açıklamalarını dikkatle dinleyerek çürütücüler öne sürdükleri ve bu çürütücülerin kendinden sonraki gelen argümanların gerekçeleri olması dikkat çekici bir bulgu olmuştur. Çürütücülerin başka bir görevi de sadece iddiayı değil bazı durumlarda veri, iddia ve gerekçeyi içeren alt argümanların da geçerliğini yok etmek olmuştur. Ayrıca verilerden iddiaya geçişte araştırmacının sorgulatmasıyla birlikte öğrencilerin gerekçelerini ifade ettikleri anlaşılmaktadır. Tüm bunlarla birlikte katılımcıların argümantasyon sürecinde destekleyici ya da niteleyicileri ifade etmedikleri de görülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Argümantasyon, analiz, dönel cisim, yüzey alanı, argümantasyon sürecinin bileşenleri

[a] ayse.tekin@deu.edu.tr https://orcid.org/0000-0002-8971-1970
[b] ali.ozgun.ozer@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-4204-9115
[c] esra.bukova@deu.edu.tr https://orcid.org/0000-0001-7571-1374

How to Cite: Tekin Dede, A., Özer, A. Ö., & Bukova Güzel, E. (2022). Dönel cisimlerin yüzey alanının hesaplanması sürecindeki argümanların incelenmesi. *Cumhuriyet International Journal of Education, 11*(4): 587-603

Giriş

Bireysel öğrenmeden sosyal bağlamda öğrenmeye doğru geçişle birlikte düşünme ve akıl yürütme sosyal bir etkinlik ürünü olarak görülmekte (Lerman, 2000; 2001) ve bu süreçteki sosyal etkileşim ile öğrencilerin bilgiyi yapılandırdıkları ifade edilmektedir (Wood vd., 2006). Bu bakış açısı sosyo-kültürel teorilerin arkasında yatan temel düşünceyi oluşturmaktadır (Forman, 2003). Sosyo-kültürel teoriler öğretme ve öğrenme sürecindeki sosyal ve iletişimsel uygulamaları ön planda tutmakta ve bu uygulamalar esnasında öğrenciler matematiksel olarak iletişim kurarak tartışmalara katılmaktadırlar (Lampert & Cobb, 2003; Sfard, 2001). Söz konusu tartışmalar süresince etkin matematiksel sorgulamalar gerçekleştirilmekte ve sorgulamayı içeren öğrenme süreçleri farklı temsiller kullanmayı, argümanlar oluşturmayı, matematiksel nesneler hakkında akıl yürütmeyi ve başkasının düşünmesini açıklamayı içermektedir (Hunter & Anthony, 2011). Etkili bir matematik öğretimi için öğretmenlerin öğrencilerini matematiksel sorgulamaya teşvik eden öğrenme olanakları ve etkinlikleri hazırlamaları, öğrencilerini sorgulatarak ne bildiklerini ve neye gereksinim duyduklarını anlamaları ve onları öğrenmeye daha iyi bir şekilde teşvik etmeleri gerektiği vurgulanmaktadır (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Bu süreçte öğrenciler ve hatta öğretmenler kendi matematiksel düşünmelerini açıklığa kavuşturmak için matematiksel açıklamalar yapmakta ve eğer bir başkası bu açıklamalara meydan okur ya da bunları sorgularsa, yanıt olarak matematiksel gerekçeler sunmaktadırlar (Cobb, vd., 1992). Sorgulamaya dayalı öğretimin yapıldığı sınıf ortamlarındaki sınıf içi tartışmalar esnasındaki açıklama ve gerekçelendirme eylemleri argümantasyon kavramıyla ilişkilendirilmektedir (Yackel, 2004).

Uluslararası politika belgeleri ve literatürdeki çalışmalar matematiğin öğrenilmesi ve öğretilmesinde öğrencilerin sorgulama yapmalarının ve birbirleriyle etkileşim halinde argümanlar oluşturmalarının önemli olduğuna vurgu yapmaktadır (Common Core State Standards for Mathematics [CCSSM], 2010; Hunter, 2007; Krummheuer, 2007; NCTM, 2000). Bununla birlikte matematik öğretiminde hem matematiksel kavramların hem de matematiksel işlemlerin üzerinde durulması ve kavramlar ile işlemler arasındaki ilişkinin kurulması gerekliliği de matematiğin öğrenilmesi ve öğretilmesini desteklemektedir (Van de Walle, 1989). Dolayısıyla kavramlar ve işlemler arasındaki ilişkilerin kurulduğu matematik öğrenme ve öğretme sürecinde öğrencilerin sınıf içi tartışmalar yapmaları ve birbirleriyle etkileşim kurarak etkili argümanlar oluşturmaları önemli olacaktır. Bu bağlamda bu çalışmada Analiz I dersindeki belirli integral kavramı ve uygulamalarının öğretiminde öğrencilerin sorgulama yapmaları sağlanmış ve sorgulamalarına dayalı olarak kendi açıklamaları ve gerekçelendirmelerini sundukları argümantasyon süreçlerinin oluşturulması teşvik edilmiştir. Hathaway (2008) Analiz dersinde hesaplamalara dayalı işlemsel bilgilerin ön planda olduğunu belirtmekte ve kavramsal öğrenmeyi desteklemek için öğrencilerin kavramlar ve yapılar hakkında tartışmalarının önemi üzerinde durmaktadır. Belirli integral konusu ele alındığında ise öğrencilerin sadece hazır formülleri kullanarak hesaplamalar yapmalarının, temel kavramları tam olarak anlamamalarına neden olduğu belirtilmektedir (Milovanovic vd., 2011). Dolayısıyla belirli integral konularının öğretiminde kavramsal öğrenmeye de odaklanılmasının gerektiği açıktır. Literatürdeki çalışmalarda belirli integral kavramlarının öğretimini desteklemek için teknoloji desteği ve çoklu gösterim kullanımından faydalanıldığı görülmektedir (Çağlayan, 2016; Çetin & Dev, 2021; Delice & Sevimli, 2010; Milovanovic vd., 2011; Tatar & Zengin, 2016). Bu çalışmada ise literatürdekilerden farklı olarak belirli integral öğretiminde kavramsal öğrenmeyi desteklemek amacıyla öğrencilerin düşüncelerine ilişkin açıklamalarını ve gerekçelendirmelerini sundukları argümantasyon süreçlerini oluşturmak hedeflenmiştir.

Ülkemizdeki argümantasyon çalışmalarının incelemesini gerçekleştiren Topuz ve Cantürk Günhan (2021) en fazla çalışmanın lisans düzeyinde öğretmen adaylarıyla yapıldığını belirtmektedirler. Bu çalışmalardan Doruk (2016) Analiz dersindeki ispat süreçlerini, Erkek ve Işıksal Bostan (2018) geometri sorularının çözümündeki global argümantasyon yapılarını, Öztürk ve arkadaşları (2019) sınıf öğretmeni adaylarının temel ispat süreçlerini ve Tekin Dede (2019) modelleme süreçlerindeki argümanları incelemişlerdir. Bunlarla birlikte farklı düzeydeki öğrenci gruplarıyla gerçekleştirilen argümantasyon çalışmaları da karşımıza çıkmaktadır. Çalışmaların çoğu ortaokul düzeyinde olup bu çalışmalar; sekizinci sınıf öğrencilerinin argümantasyon sürecindeki prizma, silindir ve yüzey alanları konularına ilişkin matematiksel uygulamalarını (Şahin Doğruer & Akyüz, 2020), altıncı sınıf öğrencilerinin argümanlarının kalitesini modelleme sürecine yansıtmalarını (Aydın Güç & Kuleyin, 2021) ve sekizinci sınıf öğrencilerinin argümantasyon tabanlı olasılık öğretimindeki matematiksel üstbiliş farkındalıkları ve olasılıksal muhakeme becerilerini (Doruk ve ark., 2018) inceleme üzerinedir. Bülbül ve Urhan (2016) ise lise son sınıf öğrencileri ile çalışarak öğrencilerin argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki ilişkileri ortaya koymuşlardır.

Uluslararası literatür ele alındığında argümantasyon alanındaki çalışmaların çoğunluğu ispatlama üzerine olmuştur (bk. Knipping, 2004; 2008; Knipping & Reid, 2013; Pedemonte, 2002; 2008). Sınıf içindeki ispatlama etkinlikleri dışında da argümantasyon süreci karşımıza çıkabilmektedir. Krummheuer'in (1995) de ifade ettiği gibi bir problem çözümü ya da basit bir akıl yürütme süreci gibi eylemlerde de argümanlar oluşabilmektedir. Bu fikre dayalı olarak sınıf içindeki farklı öğrenme ve öğretme etkinlikleri üzerinde çalışan öğrencilerin argümanlarının incelendiği çalışmaların sayısı da oldukça fazladır (bk. Ayalon & Hershkowitz, 2018; Conner, vd., 2014; Forman vd., 1998; Krummheuer, 2007; Solar vd., 2020; Stephan vd., 2003; Stephan & Rasmussen, 2002; Yackel & Cobb, 1996). Bu çalışmalarda hem sınıf içindeki argümanlar ele alınmış hem de argümantasyon süreçlerindeki öğretmenlerin eylemleri ayrıntılı bir şekilde tartışılmıştır.

Öğrencilerin uygun açıklamalar ve gerekçelendirmeler sundukları tartışmaları içeren argümantasyon süreçlerinde matematiksel kavramları öğrenmelerinin kolaylaşacağı ifade edilmektedir (Hufferd-Ackles, Fuson & Sherin, 2004; Krummheuer, 2000; Stein vd., 2008). Söz konusu matematiksel kavramlardan özel olarak belirli integral kavramı ve uygulamaları ele alındığında, bu kavram ve uygulamaların anlaşılmasının temelinde öğrencilerin hangi işlemi neden yaptıklarını bilmelerinin gerekliliği (Berry & Nyman, 2003) ve işlemsel bilgi ile kavramsal bilginin bir arada ele alınmasının önemi üzerinde durulmaktadır (Hiebert & Carpenter, 1992). Bu bağlamda çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin üç boyutlu cisimlerin yüzey alanına ilişkin kavramsal bilgileri ile söz konusu yüzey alanını hesaplamayı sağlayan işlemsel bilgilerini bir arada kullandıkları sorgulama tabanlı tartışmalardaki argümanların yapısı derinlemesine incelenmektedir. Bu çalışma ile hem belirli integral konularının öğretimine ilişkin literatüre argümantasyon açısından bir bakış sunulmaktadır. Bir başka deyişle, argümantasyon sürecinin öğrencilerin kavramsal ve işlemsel bilgilerini açığa çıkarmaları ve aralarındaki ilişkileri ortaya koymalarını sağlamak anlamında literatüre bir yenilik kazandırılacağı düşünülmüştür.

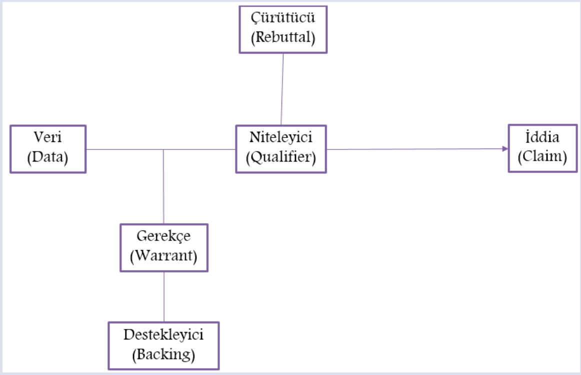
Bu bağlamda çalışmada belirli integral konularından dönel cisimlerin yüzey alanını hesaplamayı sağlayacak modelin oluşturulması sürecinde öğrencilerin ortaklaşa argümanlarının incelenmesi amaçlanmaktadır. Söz konusu amaç doğrultusunda çalışmada şu probleme yanıt aranmaktadır:

İlköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin dönel cisimlerin yüzey alanının hesaplanması konusundaki argümantasyon süreçleri nasıl şekillenmektedir?

Teorik Altyapı: Ortaklaşa Argümantasyon

Argümantasyon kavramını literatüre kazandıran Toulmin (1958/2003) bu kavramı bir kişinin iddiası hakkında karşısındaki topluluğu ikna etmesi veya kendisini savunması olarak tanımlarken Krummheuer (1995) matematik sınıflarındaki argümantasyonu ele alarak Toulmin'in tanımındaki savunma ifadesi yerine öğrenciler ve öğretmenin iş birliği içerisinde açıklamalarını ve gerekçelerini sundukları ortaklaşa bir yapıdan söz etmiştir. Matematik eğitimi alanında argümantasyon, birden fazla kişinin (öğrenciler ve öğretmen) matematiksel bir iddiada bulundukları ve bu iddiayı desteklemek için kanıtlar sundukları bir süreç olarak tanımlanmaktadır (Conner vd., 2014). Argümantasyon sürecinde katılımcılar, matematiksel kavramları ve gerçekleri eleştirmekte, detaylandırmakta, gerekçelendirmekte ve yanlış olduğunda çürütmektedirler ve bu esnada ortak bir fikir birliği oluşturmaya çalışırlarken karşıt perspektifleri de anlamaktadırlar (Hunter, 2007). Argümantasyon süreci, bilgileri anlamak için tartışma yapmak, bir şüpheyi netleştirmek, karara varmak, bir çatışmayı çözmek, var olan bilgiyi çoğaltmak vb. gibi faydalar sağlamaktadır (Schwarz, 2009).

Krummheuer (1995) Toulmin'in argüman modelini matematik sınıflarındaki argümantasyona uygun olacak biçimde uyarlarken, argümanların bir çerçeveye bağımlı olduğunu ifade etmiş ve bu çerçevenin yalnızca akademik matematiksel bilgileri değil sınıfın sosyal bağlamı içerisinde öğrencilerin ortak deneyimlerine dayalı olarak içselleştirdikleri bilgileri de içerdiğini vurgulamıştır. Bu ifadeleri doğrultusunda Toulmin'in (1958/2003) argümantasyon şemasını (TAŞ) matematik eğitimine uyarlayarak argümantasyon sürecinin bileşenlerini Resim 1'de ve takip eden kısımdaki gibi açıklamıştır.



Resim 1. Toulmin'in Argümantasyon Şeması (TAŞ)

İddialar oluşturulan argümanla birlikte doğruluğu kabul edilen ifadelerdir. Bir argümanın iddiası sınıf içinde sorulan soruların yanıtları olabileceği gibi genel olarak öğrencilerin anlamaya çalıştıkları sonuçlardır (Conner vd., 2014). Veriler iddiaları destekleyen ifadelerdir. Gerekçeler, veriler ve iddialar arasında köprü görevi görmekte ve verileri destekleyen ek bilgileri içermektedir. Gerekçeler kimi zaman iddianın belirsizliğini yok etmek kimi zaman da yalnızca bu belirsizliği azaltmak için kullanılmaktadırlar (Conner vd., 2014). Gerekçelerin geçerli olmadığı durumları açıklayan ifadeler çürütücü olarak adlandırılmaktadır. Çürütücüler karşıt örnekleri veya gerekirse argümanın değiştirilmesi gereken koşullarını içerebilmektedirler (Conner vd., 2014). Tamamlanmış bir argümantasyonda çürütülmüş iddiaların yeri yoktur fakat bütün argümantasyon sürecini sunmak istediğimizde çürütücü bileşenini de sürece eklemek önemlidir (Knipping & Reid, 2015). İddianın kesinlik derecesini açıklayan ifadeler niteleyici olarak adlandırılmaktadır. Bu kesinlik derecesi, katılımcıların iddianın oluşumuna ne derece inandıklarını değerlendirmede önemlidir (Conner vd., 2014). Son olarak destekleyiciler ise, gerekçelerin geçerliği ve doğruluğu için argümanın alanına özgü sorgusuz sualsiz kabul edilen ve iyi anlaşılan gerçeklerden oluşmaktadır (Hollebrands vd., 2010). Bunlar çerçeveye bağımlılık fikrine dayalı olarak matematiksel aksiyomlar, tanımlar, kurallar vb. olmasının yanında içinde bulunduğu matematik topluluğu tarafından kabul edilen fikirler olarak da açıklanmaktadır (Krummheuer, 1995).

Yöntem

Nitel araştırma paradigmasının benimsendiği bu çalışma durum çalışması olarak desenlenmiştir. İlköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin dönel cisimlerin yüzey alanının hesaplanması konusundaki argümantasyon süreçlerini derinlemesine incelemek amacıyla tekli durum tasarımı (Yin, 2018) kullanılmıştır. Tekli durum çalışması benzer özellikte olan bir grubun birim olarak kabul edilerek ve benzer durumda meydana gelen farklılıklara değinilerek durumun özelliklerinin detaylı şekilde açıklandığı çalışma olarak tanımlanmaktadır (Yin, 2018). Bu çalışmada da ilköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencileri bir birim olarak kabul edilmiş ve bu öğrencilerin argümantasyon süreçleri ele alınmıştır.

Çalışma Grubu

Çalışmanın katılımcıları 2018-2019 güz döneminde İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı'ndaki Analiz I dersine kayıtlı on iki erkek otuz kız olmak üzere kırk iki ikinci sınıf öğrencisinden oluşmaktadır. Öğrenciler ikinci yıla kadar olan süreçte Genel Matematik ve Soyut Matematik gibi alan dersleri, Eğitim Bilimlerine Giriş gibi eğitim derslerini ve Atatürk İlkeleri ve İnkılap tarihi gibi genel zorunlu dersleri almışlardır. Öğrencilerin daha önce aldıkları alan derslerindeki akademik başarıları çeşitlilik göstermektedir.

Uygulama Süreci

Çalışmada öğrencilerin kendi matematiksel fikirlerini önerdikleri, savundukları ve böylelikle argümantasyon sürecine aktif olarak katılım sağladıkları sorgulama tabanlı bir öğretim dizaynı (Goos, 2004) uygulanmıştır. Araştırma bir üniversitenin bilimsel araştırma projeleri birimi kapsamında desteklenmiş bir projenin bir bölümünden oluşmaktadır. Proje kapsamında 2018-2019 öğretim yılı Güz dönemi boyunca yürütülen Analiz I dersinde her hafta 6 saatlik dersler süresince veriler toplanmıştır. Analiz I dersinin içeriği dersi yürüten araştırmacı ve proje ekibi tarafından sorgulama tabanlı olarak öğrencilerin açıklamalarını ve gerekçelendirmelerini özgürce ifade edebilecekleri bir argümantasyon süreci oluşturacak şekilde hazırlanmıştır. Vize ve yarıyıl sonu sınavları dışında 13 hafta boyunca toplamda 78 saatlik uygulama gerçekleştirilmiştir. Dönem boyunca integral konusuna ilişkin alt konular işlenmiştir. Söz konusu makale çalışmasında ise proje çalışmasında yürütülen derslerden dönel cisimlerin yüzey alanının hesaplanmasına ilişkin 12. haftadaki dersin ilk bir saati ele alınmaktadır.

Çalışmada Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi'ne uygun olacak şekilde etik ilke ve kurallara uyulmuş ve katılımcılardan çalışmaya gönüllü olduklarını belirttikleri bireysel onay formları alınmıştır.

Veri Toplama Araçları

Tüm dersler iki video kamera ile kaydedilmiştir. Kameralardan biri araştırmacıya ve tahtada yazılanlara odaklanacak şekilde tahtanın hemen önünde diğer kamera da tahtayı görecek ve öğrencilerin seslerini alacak şekilde sınıfın en arkasında konumlandırılmıştır. Böylece veri kaybını mümkün olduğunca azaltmak hedeflenmiştir. Veri kaybını engellemek ve video kamera ile kaydedilemeyecek durumları (sessiz konuşmalar, mimikler, jestler, işaretler, bakışlar, vb.) kaçırmamak için, proje araştırmacılarından biri de bütün dersleri takip etmiştir. Söz konusu araştırmacı genellikle sınıfın en arkasında oturarak bazen de tartışmalar esnasında sınıfta gezerek ders esnasında gözlem notları almıştır. Gözlem notları alırken araştırmacı katılımcı olmayan bir rol sergilemiş ve yapılandırılmamış gözlem formu kullanmıştır. Bu gözlem notlarında argümantasyon sürecini tetikleyen durumları not alarak argümantasyon kesitlerini belirlemeye çalışmıştır. Özetle araştırmanın verileri ders esnasındaki video kayıtları ve araştırmacılardan birinin aldığı gözlem notlarından oluşmaktadır.

Verilerin Analizi

Dersi gözlemleyen araştırmacı ortaklaşa argümantasyonun tanımı gereği araştırmacı-öğrenci ya da öğrenci-öğrenci etkileşiminin olduğu en az 2 veya 3 kişinin aktif olarak rol aldığı ve en az veri ile iddia bileşenlerini içeren kesitleri uygulamalar esnasında belirlemiştir. Bu kesitler bazen araştırmacının bir sorusu, bazen bir öğrencinin sorusu ya da araştırmacı veya bir öğrencinin ortaya attığı bir iddia ile başlamaktadır. Dolayısıyla ders esnasında gözlem yapan araştırmacı başlangıç noktası olan soru veya iddialara odaklanmış ve o anları not etmiştir. Her dersten sonra gözlemci ile dersi yürüten araştırmacı toplantı yaparak dersin değerlendirmesini gerçekleştirmiş ve not alınan argümantasyon kesitleri hakkında tartışmıştır. Bu tartışmalarda video kayıtları da hızlıca izlenip teyit edilerek derse ait argümantasyon kesitlerinin dakikaları belirlenmiştir. Böylelikle Merriam'ın (2013) da ifade ettiği gibi veri toplama esnasında analiz sürecine başlanmıştır. Söz konusu video kesitleri transkript edilirken katılımcının takma ismi ve katılımcının ifadesini içeren sütunların yer aldığı bir tablo kullanılmıştır. Bu tablonun soluna bir sütun daha eklenerek sıra sayıları yazılmış ve katılımcıların açıklamaları için ifade numaraları belirlenmiştir. Söz konusu düzenlemelerden sonra dönel cisimlerin yüzey alanının ele alındığı dersin ilk bir saatine ilişkin 14 sayfalık bir transkript metni elde edilmiştir.

Veri analizine başlarken ilk olarak transkript metnindeki ifadeler alt argüman bölümlerine ayrılmıştır. Burada alt argüman ile tartışmalar esnasında sunulan verilerin, gerekçelerin ya da başka bir bileşenin savunulmaya ihtiyaç duyulduğu durumlarda çıkan ek argümanlar (Conner vd., 2014; Hollebrands vd., 2010) kastedilmektedir. Bu bölümlerde tartışmanın içeriğine dayalı olarak ortaya atılan bütün iddialar göz önünde bulundurulmuştur. Alt argümanlardaki iddiaların doğruluğu odak noktası olmamış, temel iddiaya götüren doğru, yanlış veya eksik ifadeler de veri analizinde kullanılacak argümanlar olarak ele alınmıştır. Temel iddiaya götüren yanlış veya eksik ifadeler argümantasyon sürecinde çürütüldüğü için bazı çalışmalarda bu çürütülmüş iddialara yer verilmediği görülmektedir. Fakat argümantasyon sürecini bütüncül olarak sunmak ve ortaklaşa çalışılan süreçteki tüm tartışmalara yer vermek amacıyla çürütücü bileşeninin sürece eklenmesi önemli olmaktadır (Knipping & Reid, 2015). Bu bağlamda ilk olarak tartışmanın odağı olan iddia belirlenmiş daha sonra bu iddiaya götüren bileşenler (veriler, gerekçe, destekleyici, niteleyici, çürütücü) işaretlenmiştir. Sonuç olarak çalışma kapsamında belirlenen argümanların şemaları oluşturulmuştur. Çürütülen iddialar da argümantasyon şemasının içinde çürütülen bir iddia ve ona ait bileşenler olarak gösterilmiştir.

Şemalarda öğrenci söylemleri kırmızı, araştırmacı söylemleri mavi, araştırmacı ve öğrencinin ortaklaşa söylemleri ise yeşil renk ile çerçevelenmiş kutularla gösterilmiştir. Kutuların rengi söz konusu bileşeni kimin ifade ettiğini göstermekle birlikte bazen kutuların içinde farklı kişilerin de ifadeleri yer alabilmektedir. Bu durumda farklı kişilerin bileşen ifadesine doğrudan bir katkısı olmamış, sadece konuşmanın bütünlüğünü bozmamak amacıyla söylemleri dahil edilmiştir. Bulgular sunulurken araştırmacı rolündeki öğretim üyesi için A kısaltması, öğrenciler için de Ö1, Ö2, … şeklinde kısaltmalar kullanılmıştır.

Araştırmacının Rolü

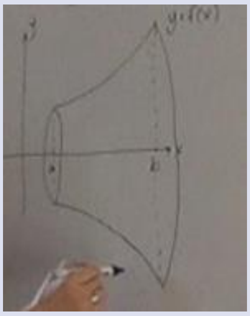
Ders öncesinde öğrencilerle gerçekleştirilen informal görüşmelerde, öğrenciler, daha önceki derslerinde düşüncelerini açıklama ve gerekçelendirme konusunda desteklenmemeleri sebebiyle çekingen kaldıkları, yanlış bir şey söyleme korkusu yaşadıkları ve bu sebeple derslerde sadece dinleyici olarak katılım gösterdiklerini ifade etmişlerdir. Dolayısıyla öğrencilerin argümantasyon sürecine katılımlarını sağlamak amacıyla birtakım desteklerin sunulması gerektiği anlaşılmıştır. Literatürdeki argümantasyon sürecinde öğretmen desteği üzerine gerçekleştirilen çalışmalar (Anthony & Walshaw, 2009; Conner vd., 2014; Herbel-Eisenmann vd., 2013; Kosko et al., 2014; Martino & Maher, 1999; Sahin & Kulm, 2008; Wood, 1998) çerçevesinde, araştırmacının başlıca rolü sınıf içindeki tartışmaların başlatılması ve yürütülmesi olmuştur. Bir başka deyişle araştırmacı öğrencilerin "birbirlerini dinledikleri, birbirlerine ve kendilerine saygı duydukları, karşıt görüşleri kabul ettikleri ve gerçekten uzlaşılmış fikirler ve bakış açılarına katıldıkları" bir sosyal ortamın oluşturulmasında (Manouchehri & Enderson, 1999) aktif bir rol oynamıştır. Ardından öğrencilerin tartışmaya aktif olarak katmalarını sağlamak için, onların fikir üretmelerini destekleyecek sorular sormuş ve eylemler sergilemiş, fikirlerini sınıfa sunmaları konusunda öğrencileri motive etmiş ve sınıfça fikirler üzerinde tartışıp fikir birliğine varılmasını sağlamıştır. Bununla birlikte Conner ve arkadaşlarının (2014) önerdiği gibi tartışmanın bazı noktalarında bağlamdan ve odaktan uzaklaşmayı engellemek ve argümantasyon sürecini sürdürebilmek amacıyla gerekli argümantasyon bileşenlerini doğrudan katkı olarak sunmuştur. Dönem boyunca bu eylemlerle derslerin işlenmesi, Yackel ve Cobb'un (1996) ifade ettiği gibi sınıf içinde argümantasyon sürecine uygun normların oluşmasını sağlamıştır. Dolayısıyla dönemin 12. Haftasında yürütülen bu çalışmada öğrencilerin argümantasyon deneyimi kazanmış oldukları ve bu deneyimleri de söylemlerine yansıttıkları düşünülmüştür.

Bulgular

Çalışmanın bulgular bölümünde dönel cisimlerin yüzey alanını hesaplamayı sağlayacak modeli integral yardımıyla oluşturmaya yönelik sınıf içi tartışmaları içeren ortaklaşa argümantasyon süreci açıklanmaktadır. İlk olarak sınıf içi tartışmalar ele alınarak öğrenciler ve araştırmacının ortaklaşa oluşturdukları argümantasyon süreçleri tek tek açıklanacak ardından tüm sürecin genel bir resmi sunularak argümanların yapısına odaklanılacaktır.

Ortaklaşa Argümantasyon Sürecine İlişkin Bulgular

Derste ilk argümantasyon süreci araştırmacının tahtaya çizdiği eğrinin x ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanının nasıl hesaplanacağına ilişkin şu sorusuyla başlamıştır: "y=f(x) eğrimiz var. a'dan b'ye sınırladık bunu. [a,b] aralığında integrallenebilir. Sonra y=f(x)'i a'dan b'ye sınırlı olacak şekilde x ekseni etrafında döndürdük ve bir dönel cisim oluşturduk değil mi? Şimdi bu cismin yüzey alanı nasıl hesaplanır?" Hemen ardından araştırmacı söz konusu ifadesine ilişkin çizimini yapmıştır (bkz Resim 2).



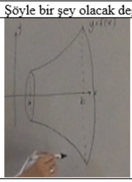
Resim 2. Araştırmacının dönel cisme ilişkin çizimi

İlk olarak öğrenciler hacmin türevini hesaplama, cismi oluşturan disklerin çevrelerini hesaplama, yay uzunluğundan yararlanma veya eğri altında kalan alandan faydalanma gibi farklı öneriler sunmuşlardır. Fakat bu önerilerin üzerine tartışma devam etmediği için argümantasyon sürecine dahil edilmemiştir. Bu süreçteki ilk iddia Ö6'nın öne sürdüğü dönel cismin açılımıyla oluşacak kesitlerin, kendi ifadesiyle "dikdörtgenimsi ve üçgen benzeri" şekillerin alanlarını integral yardımıyla bulmaları gerektiği iddiası olmuştur. Bu şekillerin alanlarını bulmak için de açılımlarının tekrar koordinat düzlemine yerleştirilmesi gerektiğini belirtmiştir. Araştırmacı oluşacak şekillerin hangi geometrik şekle ait olabileceğini veya koordinat sistemine yerleştirilmesiyle hangi noktalardan geçebileceğini bilemeyeceklerini belirterek Ö6'nın iddiasını çürütmüştür. Söz konusu çürütülen iddiaya ilişkin TAŞ Resim 3'te verilmiştir.

Bu esnada Ö10 önceki derslerde belirli integral ile alan hesabındaki yaklaşımlarını hatırlayarak orada kullandıkları disk yöntemini söylemiş ve alan hesabından farklı olarak disklerin çevresinden değil de üç boyutlu olarak ele alıp yan yüzey alanlarından yola çıkmayı öneren bir iddia sunmuştur.

ÇÜRÜTÜCÜ

Açılımı oluşturan şekiller düzgün geometrik şekiller olmayabilir.

A	Nereden geçecek? Nasıl yapılacak? İşin içinden çıkabilir miyiz peki? Hani bir silindir olsa açılınca neye benzeyeceğini biliyoruz. Onda bir sıkıntı yok. Silindir olması için f(x)'in bir doğru olması gerekiyor zaten. Bir eğri olduğunda dönmesi ile silindirden farklı bir şekil oluşacak. Nasıl bir şekil oluşur sizce? Tanıdığınız bir şekil var mı?
Ö7	Baca gibi bir şey.
Ö5	Koni gibi bir şey.
Ö8	Kesik koni.
A	Şöyle bir şey olacak değil mi? Yani bu bildiğimiz bir şekil değil.
Ekran alıntısı	

VERİ

Dönel cismin ifadesi.

A: "$y = f(x)$ eğrimiz var. A'dan b'ye sınırladık bunu. $[a, b]$ aralığında integrallenebilir. Sonra $y = f(x)$'i a'dan b'ye sınırlı olacak şekilde x ekseni etrafında döndürdük ve bir dönel cisim oluşturduk."

ÇÜRÜTÜLEN İDDİA

Dönel cismin açılımı koordinat düzlemine yerleştirilerek yüzey alanı hesaplanır.

Ö6	O zaman silindirimsi çanımsı bir şey oluşacak ya bunu açsak. Açtığımız zaman ortası dikdörtgenimsi bir şey kalacak ve kenarları üçgen benzeri bir şey oluşacak. Bu dikdörtgenin alanını alsak. Üçgenlerin alanlarını integralden bulsak.
A	Peki, o dikdörtgen ve üçgenlerin alanlarını integralle nasıl hesaplayabiliriz? Onların hepsini açıp açıp tekrar koordinat eksenine mi yerleştireceğiz?
Ö6	Evet.

Resim 3. Birinci argümantasyon kesitinin çürütülen ilk iddiasına ilişkin TAŞ

Ö10: Bence disklerin çevresinden değil disklerin kenarlarındaki alanlardan çıkacak.

A: Kenarlardaki alanlardan?

Ö10: Yani disk hacmi olan bir şeydir. İntegralde düşünmedik ya, o alan olmuş oluyor aslında. Çevre gibi değil de alanmış gibi.

A: Kesitlerin alanları mı?

Ö10: Aynen. Alandan gelecek bence.

Ö2: Ama onu sonsuza götürdüğümüzde yine çizgiye dönüşecek mi?

Ö10: Ama hacmi olan bir şey düşündüm. Silindir diye düşündüm. Hacmi de alandan bulacağız.

Ö11: Yani kısa kenarlı alanları döndürdüğümüzde…

Ö10: Aynen alandan gideceğiz.

A: n sonsuza gidince de çember oluyor. Aynı şey aslında dediğiniz. Peki bunu cebirsel olarak göstermeye çalışmak ister misiniz? Kim gelir?

Ö2: Şimdi çember düşündüm. Bir tane ip düşünün. Şöyle ipi geçirip döndürdüğümüz zaman bizim o çevreyi bulmamız lazım. O çevre de çember şeklinde oluyor ya o çemberleri biz yan yan yani CD gibi düşünürsek cismin yüzey alanını bulmuş oluruz. Onu CD'ye indirgeyelim. O çizgiler en sonda çember oluşturacak. CD dediğim 3 boyutlu bir şey ya, onları n sonsuza götürdüğümüzde çember oluşacak. Onun çevresine gideceğiz yani çevrelerin toplamı.

Araştırmacı gözlem notlarında bazı öğrencilerin Ö10'un bu iddiasını sorguladığı görülse de söz konusu iddia sınıfça ele alınmamış bunun yerine Ö2 ve Ö11 de limit kullanarak disk sayısını sonsuza götüreceklerini ifade ederek yüzey alanına değil de disklerin çevrelerine ihtiyaç duyacaklarını belirttikleri yeni bir iddia ortaya atmışlardır. Burada iddialarını desteklemek için Resim 4'teki ifadelerinden de görüldüğü üzere disklerin sayısını artırdıkça inceldiği gerekçesini kullanmışlardır. Bir başka deyişle limit durumunda disk sayısının sonsuza gidiyor olması sebebiyle alanı değil çevreyi almayı vurgulamışlardır. Bu tartışmalara ilişkin alt argümanın TAŞ'ı Resim 4'te verilmiştir.

Disklerin çevre uzunluklarının toplamını bulma fikrinin ardından Ö3 yay uzunluklarından yararlanmayı öneren yeni bir iddia sunmuştur. Bu iddiasında önceki derslerde yay uzunluğunu hesaplamak için eğriyi küçük parçalara böldüğünde ortaya çıkan en benzer doğru parçalarının uzunluklarından yararlanmayı düşündüğü söylenebilir.

Ö3: Yay uzunluğunu bulsak bir şeyler yapabiliriz.

A: Yay uzunluğunu bulmayı biliyoruz zaten. Bulduk say ne yapabiliriz?.. Neyin alanı yüzey alanını verecek dedin?

Ö11: Şurası aslında.

A: Yay uzunluğu mu yani orayı gösteriyorsun da.

Ö11: Yani evet. Ben öyle düşünmüştüm.

A: Dediğini anlamak için ve arkadaşlarının da anlamlandırması için diyorum. Şunu diyorsun, yani doğru parçasını döndürdüğümüzde alana ulaşır mı diyorsun? Yüzey alanına. Daha sonra bunu küçülteceğiz mi diyorsun?

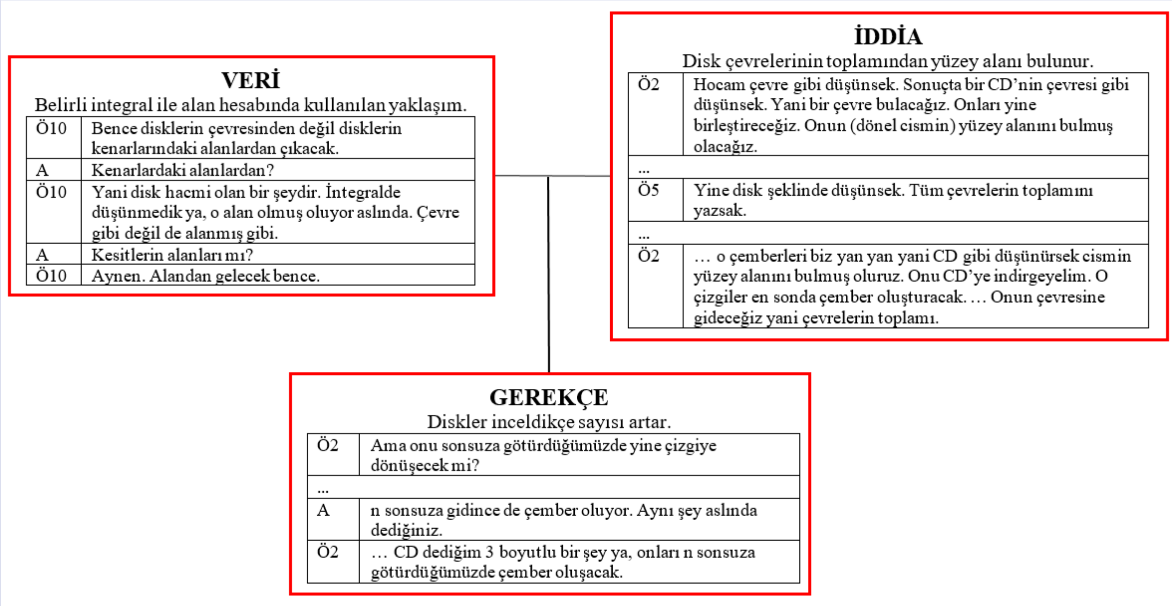
Ö11: Evet.

A: (Sınıfa yönelerek) Ne diyorsunuz anladınız mı?

Sınıf: Hayır.

A: Yani burada bir yay uzunluğu var bir doğru parçası. Bunu şekil boyunca döndürünce tarayacak ya etrafını. Daha sonra onlardan bir sürü olacak muhtemelen.

Ö11 net bir şekilde düşüncesini ifade etmediği için araştırmacı "… yani doğru parçasını döndürdüğümüzde alana ulaşır mı diyorsun? Yüzey alanına. Daha sonra bunu küçülteceğiz mi diyorsun?" şeklinde Ö3'ün düşüncesini genişleterek iddiasını bir kez daha vurgulamıştır. Aynı zamanda iddiayı biraz daha açıklayıp sınıfın dikkatini çekmek için "Yani burada bir yay uzunluğu var, bir doğru parçası. Bunu şekil boyunca döndürünce tarayacak ya etrafını. Daha sonra onlardan bir sürü olacak muhtemelen." şeklinde gerekçeyi de ifade etmiştir.



Resim 4. İkinci argümantasyon kesitine ilişkin TAŞ

Bu esnada Ö11 farklı bir bakış açısı sunarak yeni bir iddia ortaya atmıştır.

Ö11: Hocam şimdi bu (elindeki A4 kağıdı) dikdörtgen, bunu döndürüyoruz. Yani şuradakileri (dikdörtgenin bir kenarını gösteriyor) birleştirdiğimizde yüzey alanını verecek.

A: Evet

Ö11: Hatta biz bunu (dikdörtgenin bir kenarını) Δx'i 0'a götüreceğiz. Yani çok küçük yapacağız çember olacak. Çemberleri üst üste koyduğumuzda onun yüzey alanını bulmuş olacağız.

…

A: Şunu (dikdörtgenin kısa kenarını) f(x) alsak. Düzgün olmak zorunda da değil. Dikdörtgeni döndürmekten ziyade eğriyi döndür.

Ö11: O zaman yay uzunluğunu biliyor muyuz? Bilmiyor muyuz?

A: Öğrendik mi yay uzunluğunu?

Sınıf: Öğrendik.

Ö11: O zaman yay uzunluğunu bulalım.

Ö11 iddiasında bir dikdörtgeni kısa kenarlarından birinin etrafında döndürdüğünde her bir kısa kenar uzunluğunun döndürülerek yan yana eklenmesiyle yüzey alanının bulunabileceğini belirtmiştir. Bu ifadesini desteklemek için gözlem notlarında elinde tuttuğu A4 boyutlu bir kağıdı döndürdüğü belirlenmiştir. Burada öğrencinin düşüncesi yanlış olmamakla birlikte bir doğru parçasına dayalı olarak çalışma fikriyle sınırlı olduğu anlaşılmıştır. Araştırmacı bu sınırlı fikrin genel bir ifade oluşturmada yetersiz kalacağını düşünerek "Şunu [dikdörtgenin kısa kenarını] f(x) alsak. Düzgün olmak zorunda da değil. Dikdörtgeni döndürmekten ziyade eğriyi döndür." ifadesiyle hem onun iddiasını çürütmüş hem de daha öncesinde Ö3'ün yay uzunluklarını içeren ifadesine ikinci bir gerekçe sunmuştur. Böylelikle yay uzunluklarını kullanma fikrine sınıfın geri dönmesini sağlamıştır. Bir başka deyişle araştırmacının bu açıklaması dikdörtgene dayalı fikri çürütmek ve yay uzunluklarını kullanma fikrini desteklemek için aynı anda farklı amaçlara hizmet etmiştir. Özetle araştırmacının söz konusu ifadesi bir iddianın gerekçesi iken başka bir iddianın çürütücüsü olmuştur. Söz konusu argümantasyon kesitine ilişkin TAŞ Resim 5'te verilmiştir.

Yay uzunluğu tartışılmaya başlanınca öğrenciler tekrar disklerin çevresinden yararlanabileceklerine odaklanmışlardır. Disk çevre uzunluklarının 1'den n'ye kadar toplamlarının nasıl yüzey alanını vereceğine ilişkin bir tartışma devam ederken Ö2'nin geçmiş derslerdeki yaklaşımlarını hatırlamak için defterinin sayfalarını karıştırdığı gözlem notlarından anlaşılmıştır. Bunun üzerine Ö2 yüzey alanını hesaplamak için modele Δx'in eklenmesi gerektiğini ifade etmiştir.

Ö2: Dün hocam biz hacimde oraya Δx'i ekleyivermişiz gibi duruyor şu an defterime baktığımda. Burada da öyle bir şey yapsak.

A: Ama nedenini açıklamıştık ya h geldiği için demiştik.

Ö2: Tamam burada da sonuçta o disklerde h geleceği için yine Δx gelecek. Yani o disklerin çevresi çıkacak.

A: Tamam gel tahtaya yaz o zaman. Ya da söyle yazalım.

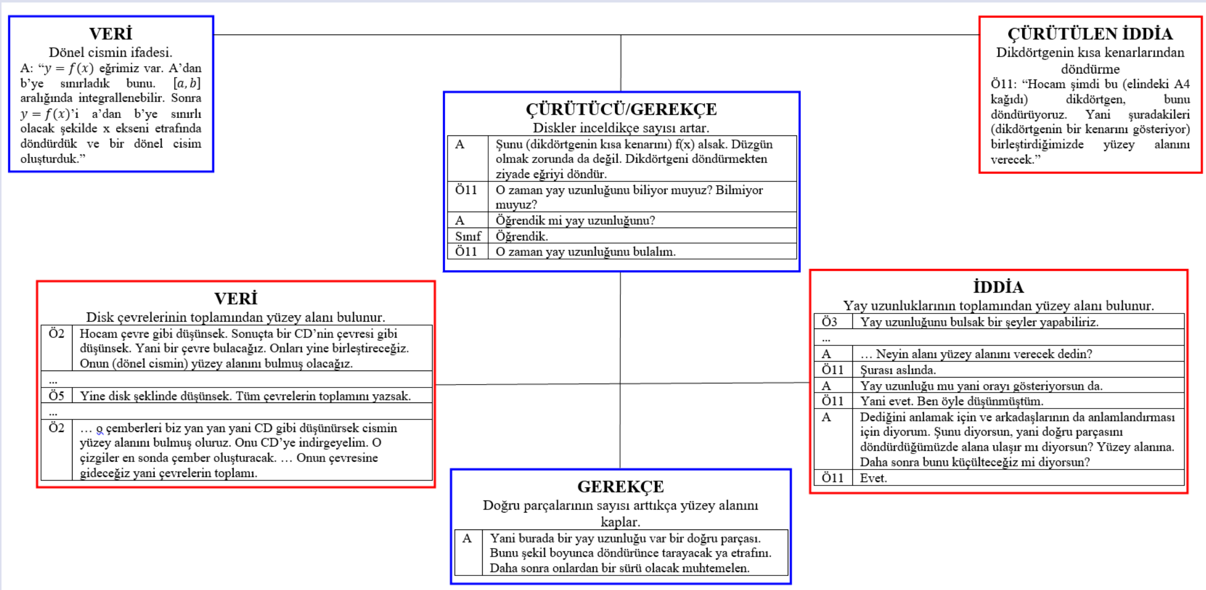
Ö2: Limit n sonsuza giderken i 1'den n'ye. Ama şimdi çevreyi bilmiyoruz değil mi? Çevreyi biliyor muyuz?

A: Bilebiliriz bence. Düzgün geometrik şekillerin çevrelerini biliyoruz.

Ö11: 2πr o zaman. Hatta 2π'yi başa atayım. Sonra r kaldı.

Ö2: x_i noktası oluşturduğumuz zaman $f(x_i)$ onun yarıçapı olmuş oldu. r de $f(x_i)$ oldu yani. Çarpı $Δx_i$.

Ö11: [Tahtaya $2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$ *yazıyor.]*



Resim 5. Üçüncü argümantasyon kesitine ilişkin TAŞ

Ö13: Bence çözdük hocam.

Ö14: Bu kadar.

…

A: Şunu bir integral olarak yazabilir misin?

Ö2: 2π yi dışarı at.

Ö11: [Tahtaya $2\pi \int_a^b f(x).dx$ *yazıyor.]*

Araştırmacının bir önceki derste hacim modelini oluştururken disklerin yüksekliğini yansıtmak için Δx’i eklediklerini hatırlatarak Ö2’yi düşüncesini cebirsel olarak açıklaması için tahtaya davet etmiştir. Ö11’in de desteği ile tahtaya $2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$ ifadesini yazmışlardır. Buraya kadar araştırmacı ve öğrencilerin ortaklaşa olarak oluşturdukları argümanın gerekçesi Ö2’nin ifade ettiği gibi çemberin yarıçap uzunluğunu temsil eden fonksiyonun $f(x_i)$ olduğu düşüncesi olmuştur. Bunun üzerine oluşturdukları modele dayalı olarak tartışmaya devam etmişlerdir. Araştırmacı Ö11’e yazdığı ifadeyi integral olarak nasıl ifade edebileceğini sorduğunda Ö11 tahtaya $2\pi \int_a^b f(x).dx$ yazarak yeni bir iddia ortaya atmıştır. Bunun üzerine araştırmacı oluşturdukları modelin yüzey alanını verip vermediğini öğrencilere sormuştur.

A: Amacımız integral olarak ifade etmekti ve bir integrale ulaştık. Bu integral yüzey alanını verir mi?

Ö1: Bence olamaz.

A: Neden olamaz? [Sınıf bir süre susuyor.] Şuranın $[\int_a^b f(x).dx]$ *ne demek olduğunu sanki biz biliyoruz aslında.*

Ö1: Alan.

A: Alanla 2π’yi çarpınca dönel cismin yüzey alanını veriyor mu?

Ö11: Bu eğrinin altında kalan alanı bulduk ve 2π ile çarptık. Yüzey alanını vermezmiş gibi sanki.

Ö2: Bu neyin formülü? Neyin formülüymüş bu?

A: Size göre yüzey alanının formülü. Şurayı $[\int_a^b f(x).dx]$ *biliyoruz. Ne bu?*

Sınıf: Alan.

Ö2: Hı, evet doğru.

A: Alanla 2π’yi çarptık.

Ö2: Olmadı o zaman.

Araştırmacı öğrencilerin eski bilgileri hatırlamalarını istemiş ve böylelikle araştırmacı ve öğrenciler ortaklaşa bir şekilde cebirsel ifadeleri gözden geçirerek yüzey alanının $2\pi \int_a^b f(x).dx$ olduğu iddiasını çürütmüşlerdir. Burada $2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$ modelinden $2\pi \int_a^b f(x).dx$ modeline geçişi içeren bir argümanın çürütüldüğü görülmektedir. Söz konusu çürütücü tek bir iddiaya ilişkin olmadığı için Resim 6’daki TAŞ’ta kesikli çizgilerle çürüttüğü alt argüman gösterilmiştir.

Disklerin çevre uzunluklarını kullanarak model oluşturmaya yönelik argümanı çürütünce öğrenciler tekrar Resim 5’teki iddiaya yani yay uzunluklarından yararlanma fikrine dönüş yapmışlardır. Ö11 yay uzunluğu formülünü ele alarak yay uzunluklarını küçültme fikrini içeren bir iddia ortaya atmıştır.

Ö11: Bunu [yay uzunluğunu] iyice küçülteceğiz. … Onu küçülttüğümüz zaman bu yay uzunluğu küçücük kalacak, küçücük kalacağı için ip gibi düşünebiliriz. İpin de 2πr çevresi. n tane de olduğunda bunun yüzey alanı olacak.

A: Yazalım o zaman. Ne olacak?

Ö11: [Tahtaya limit, toplam işareti ve 2π yazıyor ve r yerini boş bırakıyor.] Şimdi ne yaptık? Yay uzunluğunu yazacağım. f(x)’in yay uzunluğu olacak. Bu şekli bütün olarak alacağız değil mi?

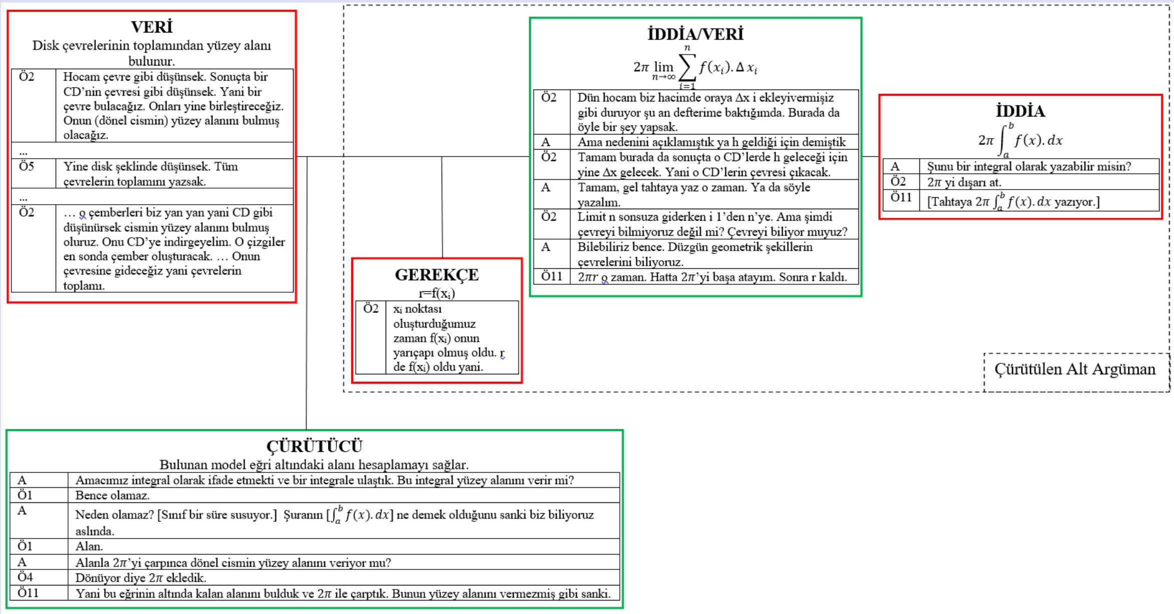
A: Bütünden kastın ne?

Ö11: Yani bu yay uzunluğunu bulup bunu iyice küçültebiliriz.

A: Küçültürüz.

Ö4: Sonsuz tane yay uzunluğu olacak yani.

Ö11: [Tahtaya $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \sqrt{1+(f'(x))^2}\Delta x$ *yazıyor.]*



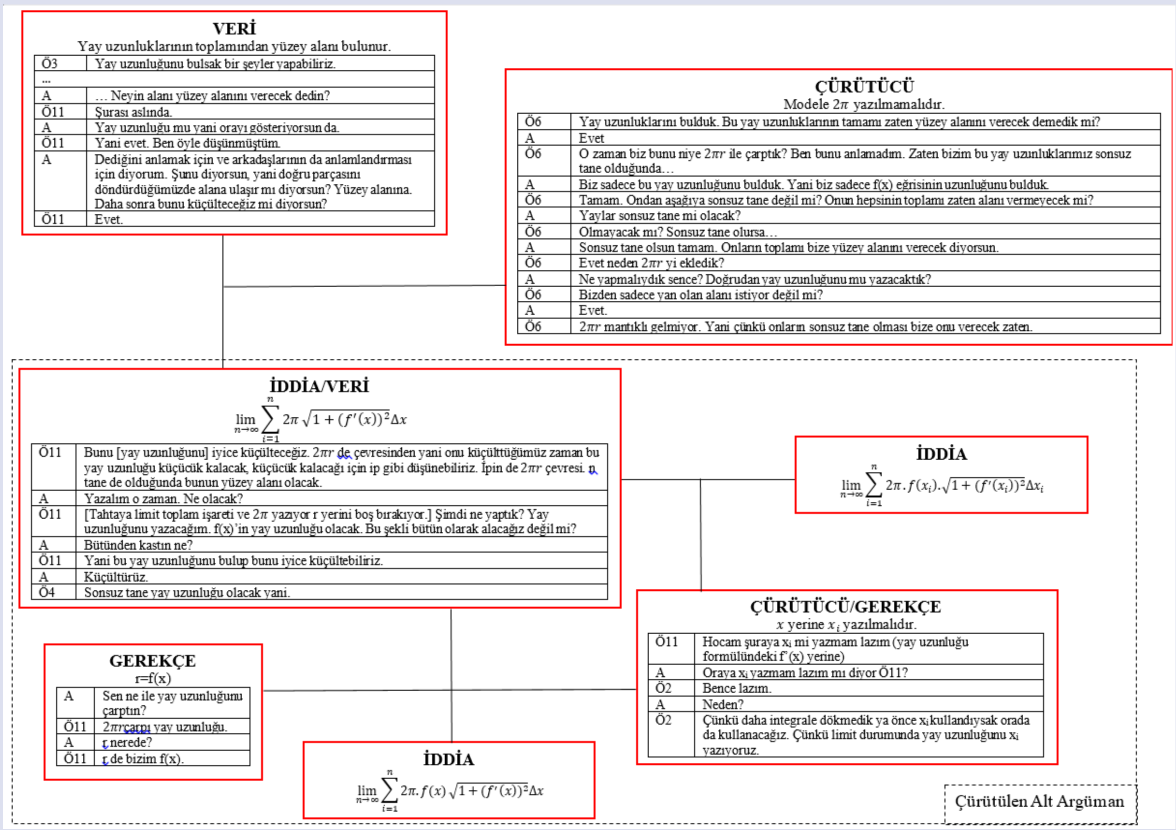
Resim 6. Dördüncü argümantasyon kesitinde çürütülen bir alt argümana ilişkin TAŞ

A: Bir dakika az önce söylediğin şeyle tutmuyor sanki.
Ö4: Aynen tutmuyor.
A: Sen ne ile yay uzunluğunu çarptın?
Ö11: 2πr çarpı yay uzunluğu.
A: r nerede?
Ö11: r de f(x). Şöyle yazalım. [Tahtaya $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi.f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\Delta x$ yazıyor.]
Ö11: Hocam şuraya [$f'(x)$'de x yerine] x_i mi yazmam lazım?
A: Oraya x_i yazmam lazım mı diyor arkadaşınız?
Ö2: Bence lazım.
A: Neden?
Ö2: Çünkü daha integrale dökmedik ya önce x_i kullandıysak orada da kullanacağız. Çünkü limit durumunda yay uzunluğunu x_i yazıyoruz.
Ö11: Evet çünkü ben tamamını almış gibi olacağım. [Modeli $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\,.\,f(x_i).\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\Delta x_i$ olacak biçimde düzeltiyor.]

Araştırmacı düşüncelerini cebirsel olarak ifade etmesini sağlayacak sorularla süreci desteklemiş ve Ö11 tahtaya $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\sqrt{1+(f'(x))^2}\Delta x$ ifadesini yazmıştır. Bu arada araştırmacı yay uzunluğu ile hangi değişkeni çarptığını anlamayınca ve yarıçapın ne olduğunu sorunca Ö11 r=f(x) gerekçesini sunmuştur ve bu gerekçeyi kullanarak daha önceki iddiasını $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi.f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\Delta x$ olacak şekilde güncellemiştir. Ardından Ö11 cebirsel ifadedeki fonksiyonun türevinin olduğu yere bağımsız değişken olarak x_i yazması gerekip gerekmediğini sormuştur. Araştırmacının bu soruyu sınıfa yönlendirmesiyle birlikte Ö2 modelde neden x_i yazılması gerektiğini limit durumunda olmasıyla açıklamıştır. Bu açıklama $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\,.\,f(x_i).\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\Delta x_i$ iddiasının gerekçesi iken aynı zamanda hemen öncesinde ifade edilen $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi.f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\Delta x$ iddiasının da çürütücüsü olmuştur. Bunun üzerine Ö6 yapılanları anlamlandırmakta zorlanmış ve neden 2πr ile çarpma yaptıklarını sorarak yeni bir tartışma başlatmıştır.

Ö6: Yay uzunluklarını bulduk. Bu yay uzunluklarının tamamı [toplamı] zaten yüzey alanını verecek demedik mi?
A: Evet
Ö6: O zaman biz bunu niye 2πr ile çarptık? Ben bunu anlamadım. Zaten bizim bu yay uzunluklarımız sonsuz tane olduğunda…
A: Biz sadece bu yay uzunluğunu bulduk. Yani biz sadece f(x) eğrisinin uzunluğunu bulduk.
Ö6: Tamam. Ondan aşağıya sonsuz tane değil mi? Onun hepsinin toplamı zaten alanı vermeyecek mi?
A: Yaylar sonsuz tane mi olacak?
Ö6: Olmayacak mı? Sonsuz tane olursa,
A: Sonsuz tane olsun tamam. Onların toplamı bize yüzey alanını verecek diyorsun.
Ö6: Evet neden 2πr yi ekledik?
A: Ne yapmalıydık sence? Doğrudan yay uzunluğunu mu yazacaktık?
Ö6: Bizden sadece yan olan alanı istiyor değil mi?
A: Evet.
Ö6: 2πr mantıklı gelmiyor. Yani çünkü onların sonsuz tane olması bize onu verecek zaten.
Ö11: Aslında onun sonsuz tane olması değil de, bunu (eğriyi) çeviriyoruz ya bunun aslında kapladığı bir şeyi (alanı) alıyoruz. Onu sonsuz tane gibi düşünme.

Araştırmacı ile öğrencilerin yürüttüğü bu tartışmada yay uzunlukları sayısının zaten sonsuza gidecek olması sebebiyle 2πr'nin modelde yazılmaması gerektiğini belirterek o ana kadar oluşturulan tüm cebirsel ifadeleri içeren iddialar çürütülmüştür. Bir başka deyişle tek bir iddiayı değil Resim 7'de gösterildiği gibi kesikli çizgilerle gösterilen bir alt argümanı çürütmüştür.



Resim 7. Beşinci argümantasyon kesitinde çürütülen bir alt argümana ilişkin TAŞ

Böylelikle öğrenciler başlangıç noktası olan yay uzunluklarının toplamından yüzey alanının elde edilebileceğine ilişkin veriye tekrar dönmüştür. Ö11 yay uzunluklarını mümkün olduğunca küçültmek yani boşlukları yok etmek için limitten yararlanılması gerektiğine ilişkin yeni iddiayı ortaya atmıştır:

Ö11: O zaman yay uzunluğunu bulalım. Sonra burası (dikdörtgenin kısa kenarı) Δx olsun. Bunu 0'a götürelim limitten. Bu iyice küçüldü ya ip gibi olur. Onları toplayınca da verir.

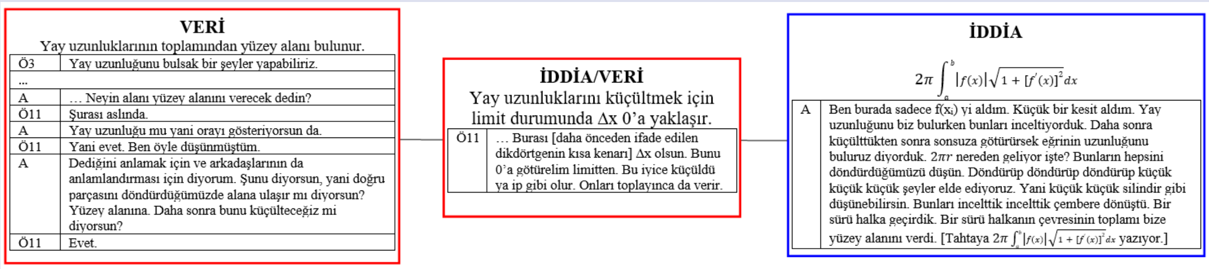
A: Ne diyorsunuz?

Ö1: Yumak doluyormuşuz gibi düşünelim ama buradan çıkmıyor sanki bir şeyler.

Ö11: Bence bu mantıklı ya.

Bu açıklamalarda Ö11 daha önce Resim 5'teki argümanda ifade edilen dikdörtgen fikrine atıfta bulunarak dikdörtgenin kısa kenarının Δx olacağını belirtmiştir. Bu fikir üzerine sınıfta bir sessizlik olmuş ve gözlem notlarından görüldüğü üzere birkaç öğrencinin bu fikri sözlü ya da başını sallayarak onayladığı belirlenmiştir.

Fakat öğrenciler bu fikre dayalı olarak modeli revize edememişler ve dersin bitimine az kalmış olması sebebiyle araştırmacı şu açıklamasıyla yüzey alanını hesaplayacakları modeli ortaya koymuştur: "Ben burada sadece f(x_i)'yi aldım. Küçük bir kesit aldım. Yay uzunluğunu biz bulurken bunları inceltiyorduk. Daha sonra küçülttükten sonra sonsuza götürürsek eğrinin uzunluğunu buluruz diyorduk. 2πr nereden geliyor işte? Bunların hepsini döndürdüğümüzü düşünün. … Yani küçük küçük silindir [kesitleri] gibi düşünebilirsin. Bunları inceltik inceltik çembere dönüştü. Bir sürü halka geçirdik. Bir sürü halkanın çevresinin toplamından yüzey alanına ulaştık.".



Resim 8. Altıncı argümantasyon kesitindeki son iddiaya ilişkin TAŞ

Araştırmacı bu açıklamasıyla ortaklaşa olarak o zamana kadar ortaya konan tüm argümantasyon sürecini özetlemiş ve yay uzunluğunu hesaplamayı sağlayacak modelin $2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ olduğunu tahtaya yazarak süreci sonlandıran iddiayı ifade etmiştir. Argümantasyon sürecini sonlandıran son iddiayı içeren alt argümana ilişkin TAŞ Resim 8'de verilmiştir.

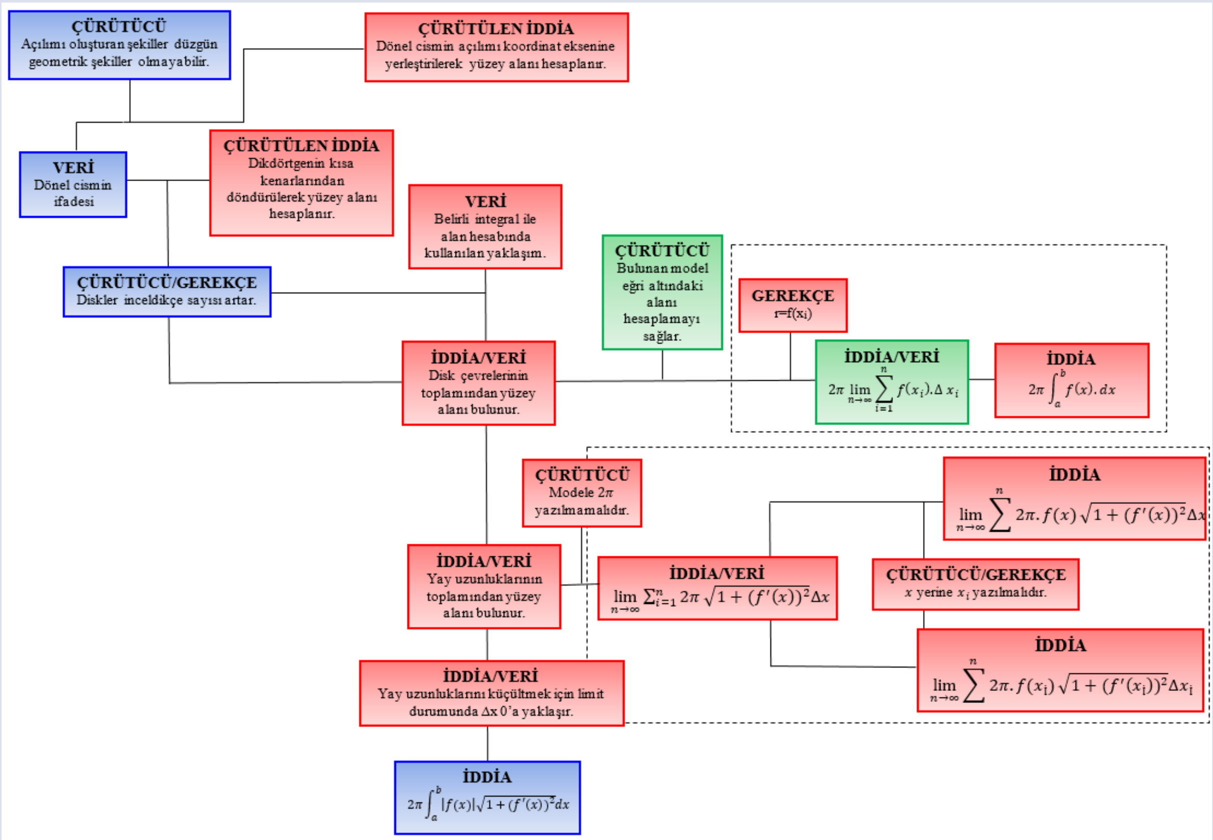
Argümantasyon Sürecine Genel Bir Bakış

Bulguların bu alt bölümünde araştırmadaki argümantasyon sürecinin tamamının TAŞ'ı (bk. Resim 9) sunularak argüman bileşenlerinin hangi göreve hizmet ettikleri ve argümantasyon sürecini nasıl etkiledikleri ele alınmaktadır.

Resim 9 incelendiğinde, araştırmacının dönel cismi ifade etmesinden sonra argümantasyon sürecinin başladığı görülmektedir. Öğrencilerden gelen yüzey alanının hesaplanmasına ilişkin farklı öneriler araştırmacı tarafından çürütülmüştür. İki farklı iddianın çürütülmesinden sonra öğrenciler belirli integral ile alan hesabındaki yaklaşımlarını kullanabileceklerini düşünmüşlerdir. Böylelikle eğrinin dönmesiyle olacak dönel cismin içine yerleştirilecek disklerin çevrelerinden yararlanabileceklerine ilişkin bir iddia ortaya atmışlardır. Dairenin alanını veren modelden yararlanarak oluşturdukları yüzey alanı modelinin alan hesabındaki modele çok benzer olmasından dolayı iddiayı araştırmacı ile ortaklaşa olarak çürütmüşlerdir. Bunun üzerine tekrar disklerin çevresini kullanabileceklerini düşünürken, bu düşünceden yay uzunlukları toplamını kullanabilecekleri yeni bir iddiaya ulaşmışlardır. Bu iddiayı veri olarak ele aldıklarında yay uzunluğunu bulmaya yarayan modele dayalı olarak yüzey alanı modeline ilişkin iddiada bulunmuşlardır. Fakat oluşturdukları modelde 2π'nin yazılmaması gerektiğine karar vererek oluşturdukları modele ilişkin iddialarını çürütmüşlerdir. Tekrar yay uzunluklarına ilişkin veriye dönerek yay uzunluklarını küçültmek için limit hesabını nasıl kullanacaklarına odaklanmışlar ve bu fikre dayalı olarak tartışmayı sonlandıramadıkları için araştırmacı gerekli açıklamaları yaparak yüzey alanı modelini ifade etmiştir.

Resim 9'daki renklendirmelere de bakıldığında ortaklaşa argümantasyon sürecinde aktif olanın öğrenciler olduğu görülmektedir. Başlangıçtaki ifadeler araştırmacıya ait olup konudan uzak iddiaları çürüttükten sonra öğrencilerin ön öğrenmelerini hatırlamaları ile tartışmanın gidişatı öğrenci ağırlıklı olmuştur. İlk çürütülen alt argümanda ilk iddianın ortaklaşa olarak araştırmacı ve öğrenciler tarafından ortaya atıldığı görülmekle birlikte bu alt argümanı çürüten yine ortaklaşa fikir birliği olmuştur. Yay uzunluklarının toplamından yüzey alanını hesaplamaya odaklanan tartışmalar öğrencilerin liderliğinde ilerlemiştir ve bu tartışmaların yanlışlığı da yine öğrencilerin ortaya attığı çürütücü sayesinde ortaya çıkmıştır. En sonda ders süresinin tamamlanmış olması sebebiyle araştırmacı konuyu toparlamak amacıyla ders süresince ifade edilen argümanları özetleyerek yüzey alanı modelini açıklamıştır.

Resim 9 argümantasyon sürecinin bileşenleri ve işlevleri açısından ele alındığında genel olarak fikirleri açıklamak için çürütücülerden sıklıkla yararlanıldığı görülmektedir. Dersin başında çürütücüleri araştırmacı ifade ederken ilerleyen kısımlarda çürütücüleri öne sürenler öğrenciler olmuştur. Bunun yanında verilerden iddiaya geçişte araştırmacının sorgulatmasıyla birlikte öğrencilerin gerekçelerini ifade ettikleri anlaşılmaktadır. Özellikle bazı durumlarda çürütücülerin kendinden sonraki argümanlar için gerekçe rolünde olması dikkat çekici olmuştur. Bir başka deyişle argümantasyon sürecinin katılımcıları bir önceki iddiayı çürütürken kullandıkları ifadelerden sonraki iddiaları desteklemek için yararlanmışlardır. Çürütücülerin başka bir görevi de sadece iddiayı değil bazı durumlarda veri, iddia ve gerekçeyi içeren alt argümanların da geçerliğini yok etmek olmuştur. Tüm bunlarla birlikte katılımcıların argümantasyon sürecinde destekleyici ya da niteleyicileri ifade etmedikleri de görülmektedir.



Resim 9. Argümantasyon sürecinin genel TAŞ'ı

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

İlköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin dönel cisimlerin yüzey alanının hesaplanması konusundaki ortaklaşa argümanlarının incelendiği bu çalışmada katılımcılar uygulama süresince özgürce düşüncelerini ifade ederek argümantasyon sürecine katılım göstermişlerdir. Bir dönemlik bir çalışmanın dönem sonundaki konulardan birini içermesi sebebiyle bu çalışmada katılımcıların aktif olarak argümantasyon sürecine katıldıkları ve dönel cisimlerin yüzey alanı modelini ortaklaşa oluşturdukları bir uygulama gerçekleştirilmiştir. Argümantasyon şemalarında yapılan renklendirmeye bakıldığında argümantasyon sürecinin bileşenlerinin büyük çoğunluğunun öğrenciler tarafından sunulduğu görülmektedir. Bu bileşenler çoğunlukla önceki derslerde edindikleri bilgilere dayalı olmuştur. Dolayısıyla katılımcıların ön öğrenmeleri argümantasyon sürecini şekillendiren önemli bir etken olmuştur. Argümantasyon sürecinin çerçeveye dayalı olma fikri sebebiyle matematiksel bilgilerin sürece etkisi kaçınılmazdır (Krummheuer, 1995). Bu bağlamda matematik konularında ön öğrenmelerin önemli olması ve ön öğrenmelerin de Analiz dersinde argümantasyona dayalı olarak gerçekleştirilmiş olması, süreçte öğrencilerin aktif katılımcılar olduğunu desteklemektedir. Bununla birlikte matematiksel düşünceleri açıklama, sunulan matematiksel açıklamaya neden katılmadığını gerekçesiyle ifade etme, sunulan matematiksel açıklama anlaşılmadığında soru sorma gibi Cobb ve Yackel (1996) tarafından açıklanan sosyo-matematiksel normların önceki derslerde oluşturulmuş olması sebebiyle katılımcılar sürece aktif katılmışlardır. Ayrıca araştırmacı çoğunlukla süreçte öğrencileri doğrudan yönlendirmekten kaçındığı için öğrenciler ileri sürdükleri her bir iddiayı, ilgili olsun ya da olmasın, denemişler ve aksi durumda çürütmüşlerdir. Bunun en net örneği öğrencilerin tartışmanın başlarında yay uzunluklarının toplamını kullanma iddiasını ortaya attıktan sonra farklı fikirleri deneyip çürütüp tekrar yay uzunluklarına dönmesi olarak gösterilebilir. Dolayısıyla öğrencilerin argümantasyon sürecinde dönem içinde deneyim kazanmış olmaları, sürece uygun normların oluşturulmuş olması ve ortaya atılan iddiaların çoğunu denemeleri beraberinde etkili ve verimli bir argümantasyon sürecini getirmiştir.

Öğrencilerin argümantasyon sürecine katılımları bileşenler çerçevesinde ele alındığında, veri, iddia, gerekçe ve çürütücü bileşenlerinin hemen hemen hepsi öğrenciler tarafından ifade edilmiştir. Öğrencilerin tartışmalar süresince birbirlerinin iddialarını sorguladıkları esnada iki durum ortaya çıkmıştır. Birinci durumda eğer öğrencinin iddiası sınıf tarafından doğru olarak kabul ediliyorsa, öğrencinin kendisi ya da bir arkadaşı gerekçe öne sürerek iddiayı desteklemiştir. İkinci durumda ise öğrencinin iddiasının uygun olmadığına karar verildiğinde öğrencilerden çürütücüler gelmiştir. Öğrencilerin ifade ettikleri çürütücüler hepsi önceki derslerde öğrendikleri bilgiler ile ortaklaşa oluşturdukları modele dayalı olmuştur.

Öğrencilerin aktif olarak çalıştığı argümantasyon sürecinde araştırmacının rolü de yadsınamaz. Araştırmacının argümantasyon sürecini sürdürmek ve desteklemek amacıyla sergilediği eylemler öğrencilerin sürece aktif katılımını sağlamıştır. Araştırmacının kullandığı eylemler literatürde argümantasyon sürecini desteklemek amacıyla kullanılan eylemlere uygun olmuştur. Örneğin araştırmacının öğrencileri açıklamaya teşvik etme (Conner vd., 2014; Sahin & Kulm, 2008), gerekçe sunmayı destekleme (Conner vd., 2014; Sahin & Kulm, 2008), öğrenci ifadelerini tekrar etme (Planas & Morera, 2012), öğrenci ifadelerini genişleterek tekrar sunma (Conner, vd., 2014) gibi eylemleri argümantasyon sürecinin sürdürülebilirliğini sağlamıştır. Bu çalışmada bu eylemlere ek olarak araştırmacının ortaya atılan iddialar yanlış da olsa müdahale etmemesi ve hatta bazen öğrencileri şüpheye düşürecek bir şekilde yanlış iddiaya yönlendirmesi argümantasyon sürecinin sürdürülebilirliğini sağlamıştır. Bu durum sayesinde öğrenciler yanlış iddianın doğru olduğunu düşünerek o iddianın gerekçelerini ifade etmeye çalışmışlardır. Bu süreçte iddianın yanlışlığını fark ettikleri derinlemesine bir sorgulama yapmışlar ve neden yanlış olabileceğine ilişkin ayrıntılı tartışmışlardır. Bu tartışmalar öğrencilerin çürütücüleri ifade etmesini sağlayan ortamların oluşmasını sağlamıştır. Goos (2004) öğrencilerin risk almasının önemi üzerinde durmakta ve öğretmenin öğrencilerin fikirlerini yargılamadan akranlarından yorum ve eleştiri almaları konusunda öğrencilerini cesaretlendirmesi gerektiğini ifade etmektedir. Bu doğrultuda araştırmacının ders süresince öğrencileri yargılamaması ve yanlış veya ilgisiz iddialara da fırsat tanıyarak argümantasyon sürecinin sürdürülmesine katkı sağladığı açıktır.

Argümantasyon sürecinin sonunda yani dönel cismin yüzey alanını veren modelin oluşturulmasında öğrenciler yay uzunluklarını küçültmek için limit hesabının gerekliliğini ifade etmişler ve iki farklı iddiayı çürütmüşlerdir. Modelin son halinin oluşturulmasında öğrenciler zorlanmışlardır. Artık yeni bir gerekçe ya da iddia öne sürmedikleri ve dersin bitmesine çok az zaman kalmış olduğu için araştırmacı modeli ifade ederek argümantasyon sürecini sonlandırmıştır. Her ne kadar son iddiayı öğrenciler ifade etmemiş olsa da süreç içerisinde ortaklaşa argümantasyonun tanımı gereği araştırmacı ve öğrencilerin birlikte çalışmaları sebebiyle söz konusu argümantasyon sürecinin verimli olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Araştırmacı ve öğrencilerin argümantasyon sürecine katılımının yanında sınıf içindeki argümanların yapısı da çalışmada dikkat çeken durumları ortaya çıkarmıştır. Krummheuer (1995) matematik eğitimi araştırmalarında veri, iddia ve gerekçe bileşenlerinden oluşan argümantasyonun çekirdeğinin yeterli olduğunu ifade etmektedir. Bu çalışmada katılımcıların çekirdeğe ek olarak sıklıkla çürütücü bileşeninden yararlanmış olmaları dikkat çekici olmuştur. Literatürde çürütücülerin iddianın karşıt durumlarını ve gerekirse argümanın değiştirilmesi gereken koşullarını içerdiği (Conner, vd. 2014) ifade edilmektedir. Çalışmada öğrencilerin düşüncelerini açıkça ifade etmeleri ve araştırmacının çoğu iddiaya tartışmada yer verip üzerine düşünülmesini sağlaması sebebiyle, birçok karşıt veya değiştirilmesi gereken durum açığa çıkmıştır. Bu durumlar bağlamında çalışmada çürütücülerle ilgili dikkati çeken iki durum olmuştur: Birincisi çürütücülerin sadece bir iddiayı çürütmesinin yanı sıra bazen uzun bir tartışmanın sonucunda birkaç iddiayı birden içeren alt argümanı çürütmesi olmuştur. Araştırmacının ortaya atılan iddialar yanlış da olsa müdahale etmemesi ve hatta bazen yanlış iddiaya yönlendirerek argümantasyon sürecinin devamını sağlaması bunda etkili olmuştur. Böylelikle öğrenciler derinlemesine bir sorgulama yapmışlar ve ifade edilen iddiaların neden yanlış olabileceğine ilişkin ayrıntılı tartışmışlardır. Bu durum Lee'nin (2015) ifade ettiği gibi öğrencilerin düşünmelerini gerekçelendirme ve açıklamalarını sağlamak için çürütücüleri önemli bir bileşen olduğu düşüncesiyle paraleldir. İkinci durum ise çürütücülerin kimi zaman kendinden sonraki argümanlara zemin oluşturmasıdır. Sonraki argümanlarda bir önceki çürütülen iddiaya atıf yapılarak çürütücünün gerekçe olarak argümana destek sağladığı görülmüştür. Dolayısıyla bir sonraki argümanda katılımcılar iddialarına gerekçe sunarak ilerlemişlerdir ve bu durum Krummheuer'ın (2000) da ifade ettiği gibi çürütücülerin öğrencilerin uygun bir cevap vermelerini destekleyerek argümanların sürdürülebilirliğini sağladığı ile paraleldir. Literatürdeki çalışmaların alt argümanların birbirine iddia-veri ve iddia-gerekçe yoluyla bağlandığına ilişkin açıklamaya (Conner, 2012; Conner, vd., 2014; Krummheuer, 1995; 2007; Stephan & Rasmussen, 2002; Weber vd., 2008) ilaveten bu çalışmada argümanların birbirine çürütücü-gerekçe yoluyla da bağlanması önemli bir sonuç olmuştur. Bu bağlamda hem çürütücü hem gerekçe rolündeki ifadelerin farklı görevleri olmuştur. Söz konusu ifadeler eksik olarak açıklanan iddiayı geçersiz kılmış, önceden unutulmuş ya da devam ettirilmemiş bir iddianın hatırlatılmasını sağlamış ya da yeniden doğru bir fikre odaklanılmasına destek olmuştur.

Çalışmadaki argümantasyon şemaları incelendiğinde destekleyici ve niteleyici bileşenlerinin olmadığı dikkat çekmektedir. Conner (2008) destekleyicilerin argümantasyon sürecinde çoğunlukla görünmez olduğunu bir başka deyişle sözlü olarak ifade edilmediği için açıkça ortaya konmayabileceğini ifade etmektedir. Bu çalışmada da bir dönem boyunca Analiz I konularının ortaklaşa argümantasyon sürecinde yapılandırılmış olması sebebiyle öğrenciler gerekçelerinin destekleyicilerini açıkça ifade etmeye gerek duymamışlardır. Örneğin bu uygulamada limit hesabının kullanılmasının sebebinin yay uzunluklarının sayısının limit durumunda sonsuza gitmesi olduğunu açıkça söylememiş olmamaları zaten dönem boyunca limit hesabı üzerinde çalışmış olmaları ve bu durumun onlar için açık olmasından kaynaklanmıştır. Bu sebeple çalışmada bu örnekteki gibi diğer destekleyiciler de açıkça ifade edilmemiştir. Stephan ve Rasmussen (2002) destekleyiciler veya gerekçelerin sözlü ifade edilmediği durumlarda matematiksel fikirlerin herkes tarafından paylaşılan fikirler (taken-as-shared) olduğunu ifade etmektedir. Dolayısıyla bu çalışmada destekleyicilerin hiç ifade edilmemesi ve her iddiaya ilişkin gerekçe sunulmamış olmaması sebebiyle sınıf içinde ele alınan matematiksel fikirlerin herkes tarafından paylaşıldığı söylenebilir.

Çalışmanın sonuçları doğrultusunda ileriki çalışmalarda öğrencilerin ve öğretmenin ortaklaşa katılım gösterdikleri uzun süreli uygulamalar yapıldığında, ortaklaşa argümantasyon süreçlerinde TAŞ bileşenlerinin tanımlanması konusunda daha ayrıntılı sonuçların ortaya çıkacağı düşünülmektedir. Bununla birlikte bu süreçlerdeki öğretmenin destekleyici eylemlerinin incelenmesi de literatürdeki çalışmalara katkı sağlayacaktır.

Summary

Introduction

When the importance and influence of socio-cultural theories came to the fore in mathematics education research, issues in mathematical discussions began to be the focus of academic research. During these discussions, effective mathematical inquiries were carried out. In mathematics teaching, where mathematical inquiries are existent, students and teachers are involved in the argumentation process (Yackel, 2004). The necessity of emphasizing both mathematical concepts and mathematical operations, and establishing the relationship between concepts and operations in mathematics teaching support learning and teaching mathematics (Van de Walle, 1989). Therefore, it is important for students to argue effectively by interacting through classroom discussions in the process of learning and teaching mathematics, in which relationships between concepts and operations are established. In this context, it was aimed to examine the collective arguments of the students in the process of constructing a model that will enable calculating the surface area of the solid of revolution, which is one of the definite integral subjects. The argumentation process provides benefits such as discussing to understand information, clarifying a doubt, reaching a decision, resolving a conflict, multiplying existing knowledge, etc. (Schwarz, 2009). Definite integral has content that students have difficulty with. For this reason, technology support and the use of multiple representations are used to support the teaching of definite integral subjects in studies (Çetin & Dev, 2021; Delice & Sevimli, 2010; Milovanovic et al., 2018). In this study, we focused on students working in an argumentation supported environment in which they presented their explanations and justifications to support their conceptual learning in definite integral.

Bu bağlamda çalışmada belirli integral konularından dönel cisimlerin yüzey alanını hesaplamayı sağlayacak modelin oluşturulması sürecinde öğrencilerin ortaklaşa argümanlarının incelenmesi amaçlanmaktadır. Söz konusu amaç doğrultusunda çalışmada şu probleme yanıt aranmaktadır:

İlköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin dönel cisimlerin yüzey alanının hesaplanması konusundaki argümantasyon süreçleri nasıl şekillenmektedir?

Method

The study was conducted as a single case study (Yin, 2018). The participants of the study were forty-two students enrolled in the second year Calculus I course in the Elementary Mathematics Teaching program of a university. The data were collected in the twelfth week of the Calculus I course, in which an inquiry-based argumentation process was created. In this course, students can freely express their explanations and justifications in the subject of the surface area of the solid of revolution. The data consisted of video recordings during the lesson and observation notes taken by one of the researchers. The video recordings were transcribed and, the transcript was divided into sub-argument sections according to the claims made. In this context, the first the claim, which is the focus of the discussion, was determined, and then the components (data, warrant, backing, qualifier, rebuttal) leading to this claim were marked, and the schemes of the arguments were created.

Results

At the beginning of the argumentation process, the researcher refuted the students' claim regarding the calculation of the surface area. Then, the students thought that they could use their approach in area calculation with definite integral. Thus, they claimed that they could use the circumference of the discs to be placed in the solid of revolution which was caused by the rotation of the curve. They and the researcher refuted the claim collectively since the surface area model they constructed by using the model that gave the area of the round was very similar to the model in the area calculation. Then, while they thought that they could use the circumference of the discs, they came up with a new claim that they could use the sum of the arc lengths. When they took this claim as data, they made a claim about the surface area model based on the model used to find the arc length. After refuting this claim, they turned back to the data on the arc lengths and focused on how to use the limit calculation to reduce the arc lengths.

In the argumentation process, the students used rebuttals frequently to explain ideas in general. While the researcher expressed the rebuttals at the beginning of the lesson, the students put forward the rebuttals in the following sections. In addition, the students expressed their warrants with the support of the researcher in the transition from the data to the claim. Especially in some cases, the rebuttals acted as a warrant for the subsequent arguments. In addition to all these, the participants did not express backings or qualifiers in the argumentation process.

Discussion

When the argumentation process was examined, the components expressed by the students were mostly based on the knowledge learned in the previous lessons. Therefore, the participants' prior learning has been an important factor shaping the argumentation process. This shows that, as Krummheuer (1995) states, the effect of mathematical knowledge on the process is inevitable because the argumentation process is based on the frames. In addition, the participants actively participated in the process since socio-mathematical norms were formed in the previous lessons explained by Cobb and Yackel (1996) such as explaining mathematical thoughts, expressing why they did not agree with the presented mathematical explanation, asking questions when the mathematical explanation was not understood. The actions of the researcher such as encouraging students to explain and justify (Conner et al., 2014; Sahin & Kulm, 2008), revoicing students (Planas & Morera, 2012), expanding student expressions and presenting them again (Conner, et al., 2014) ensured the active participation of students in the process. In addition to these actions, the fact that the researcher did not intervene even if the claims were false, and sometimes even led students to false claims in a way that made them suspicious, ensured the sustainability of the argumentation process. Thus, the students made an in-depth questioning in which they realized that the claim was false, and they discussed in detail why it might be false and so expressed their rebuttals. Therefore, as Goos (2004) stated, the researcher's encouragement of students to receive comments and criticism from their peers without judging them enabled them to take risks and form effective arguments.

Pedagogical Implications

It was noteworthy that the participants in this study frequently used the rebuttal component. Two cases emerged regarding rebuttals. First, rebuttals refuted not only one claim, but also sometimes refuted a sub-argument that includes several claims as a result of a long discussion. This situation is in parallel with the idea that rebuttals are an important component to enable students to justify and explain their thinking, as stated by Lee (2015). The second situation was that rebuttals sometimes form the basis for subsequent arguments. In the next arguments, the rebuttal provided support for the argument by referring to the previous refuted claim. Therefore, in the next argument, the participants proceeded by giving warrants for their claims, and this is in line with the fact that rebuttals ensure the sustainability of the arguments by supporting the students to give an appropriate answer, as Krummheuer (2000) states. In addition to the explanation that the sub-arguments connected to each other through claim-data and claim-warrant (Conner, 2012; Conner, et al., 2014; Krummheuer, 1995, 2007; Stephan & Rasmussen, 2002; Weber et al., 2008), it was an important result that the sub-arguments were connected to each other through rebuttal-warrant in this study. In line with the results of the study, long-term studies are needed to make detailed explanations of the argumentation components.

Araştırmanın Etik Taahhüt Metni

Yapılan bu çalışmada bilimsel, etik ve alıntı kurallarına uyulduğu; toplanan veriler üzerinde herhangi bir tahrifatın yapılmadığı, karşılaşılacak tüm etik ihlallerde "Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi ve Editörünün" hiçbir sorumluluğunun olmadığı, tüm sorumluluğun Sorumlu Yazara ait olduğu ve bu çalışmanın herhangi başka bir akademik yayın ortamına değerlendirme için gönderilmemiş olduğu sorumlu yazar tarafından taahhüt edilmiştir.

Kaynaklar

Anthony, G., & Walshaw, M. (2009). Characteristics of effective teaching of mathematics: a view from the west. *Journal of Mathematics Education, 2*(2), 147-164. https://doi.org/10.12691/education-6-1-1

Ayalon, M., & Hershkowitz, R. (2019). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior, 49*, 163-173. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010

Aydın Güç, F., & Kuleyin, H. (2021). Argümantasyon kalitesinin matematiksel modelleme sürecine yansıması. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 34*(1), 222-262. https://doi.org/10.19171/uefad.850230

Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 479-495. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.006

Bülbül, A. & Urhan, S. (2016). Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi , 10*(1) , 351-373. https://doi.org/10.17522/nefefmed.00387

Caglayan, G. (2016). Teaching ideas and activities for classroom: integrating technology into the pedagogy of integral calculus and the approximation of definite integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(8), 1261-1279. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1176261

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal, 29*(3), 573-604. https://doi.org/10.3102/00028312029003573

Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Conner, A. (2008). Expanded Toulmin diagrams: A tool for investigating complex activity in classrooms. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano& A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 361–368). Morelia, Mexico: Cinvestav-UMSNH.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities.

Educational Studies in Mathematics, 86(3), 401-429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Çetin, İ., & Dev, Ş. (2021): Pre-service elementary mathematics teachers' methods when solving integral-volume problems and the rationale behind their selections. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1951859

Delice, A., & Sevimli, E. (2010). Mathematics teacher candidates' multiple representation and conceptual-procedural knowledge level in definite integral. *Gaziantep Üniversity Journal of Social Sciences, 9*(3), 581–605.

Dogruer, S.S., & Akyuz, D. (2020). Mathematical practices of eighth graders about 3d shapes in an argumentation, technology, and design-based classroom environment. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 1485–1505. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10028-x

Doruk, M. (2016). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, Türkiye.

Doruk, M., Duran, M., & Kaplan, A. (2018). Argümantasyon tabanlı olasılık öğretiminin ortaokul öğrencilerinin matematiksel üstbiliş farkındalıklarına ve olasılıksal muhakeme becerilerine etkisinin incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *12*(1), 83-121. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.437714

Erkek, Ö., & Işıksal Bostan, M. (2019). Prospective middle school mathematics teachers' global argumentation structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(3), 613-633. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9884-0

Forman, E. A. (2003). A sociocultural approach to mathematics reform: Speaking, inscribing, and doing mathematics within communities of practice. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 333-352). Reston, VA: NationalCouncil of Teachers of Mathematics.

Forman, E. A., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. K., & Brown, C. A. (1998). "You're going to want to find out which and prove it": Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction, 8*(6), 527-548. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(98)00033-4

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 258–291. https://doi.org/30034810

Hathaway, RA. (2008). Simple acronym for doing calculus: CAL. *PRIMUS, 18*. 542–545. https://doi.org/10.1080/10511970701604014

Herbel-Eisenmann, B. A., Steele, M. D., & Cirillo, M. (2013). (Developing) Teacher discourse moves: a framework for professional development. *Mathematics Teacher Educator, 1*(2), 181–196. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.1.2.0181

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws, (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: (A project of the national council of teachers of mathematics)* (pp. 65–97). Macmillan.

Hollebrands, K. F., Conner, A., & Smith, R. C. (2010). The nature of arguments provided by college geometry students with access to technology while solving problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(4), 324-350.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(2), 81–116. https://doi.org/30034933

Hunter, R. (2007). Can you convince me: Learning to use mathematical argumentation. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 3, pp. 81-88). Seoul: PME.

Hunter, R., & Anthony, G. (2011). *Learning to "friendly argue" in a community of mathematical inquiry (Teaching and Learning Research Initiative Report)*. Wellington: New Zealand Educational Research Council.

Knipping, C. (2004). Argumentations in proving discourses in mathematics classrooms. In E. Cohors-Fresenborg, H. Maier, K. Reiss, G. Toerner & H. G. Weigand (Eds.), *Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics* (pp. 73–84). Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentation in classroom proving processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 40*(3), 427–441. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0095-y

Knipping, C., & Reid, D. (2013). Revealing structures of argumentation in classroom proving processes. In A. Aberdein & I. J. Dove (Eds.), *The Argument of Mathematics* (pp. 181– 208). Dordrecht, Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6534-4_8

Knipping, C., & Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 75–101). Springer: Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_4

Kosko, K. W., Rougee, A., & Herbst, P. (2014). What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? *Mathematics Education Research Journal, 26*(3), 459–476. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0116-1

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *Emergence of Mathematical Meaning* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Krummheuer, G. (2000). Studies of argumentation in primary mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 32*(5), 155-161.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(1), 60-82.

Lampert, M., & Cobb, P. (2003). Communication and language. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.) A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics (pp. 237-249). Reston, VA:NCTM.

Lee, T. N. (2015). Developing a theoretical framework to assess taiwanese primary students' geometric argumentation. In M. Marshman, V. Geiger, & A. Bennison (Eds.). *Mathematics education in the margins (Proceedings of the 38th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 365–372). Sunshine Coast: MERGA.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). Westport, CT: Ablex Publishing.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 87–113. https://doi.org/10.1023/A:1014031004832

Manouchehri, A., & Enderson, M. C. (1999). Promoting mathematical discourse: Learning from classroom examples. *Mathematics Teaching in the Middle School, 4*(4), 216-222. https://doi.org/10.5951/MTMS.4.4.0216

Martino, A. M., & Maher, C. A. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: What research practice has taught us. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(1), 53–78. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00017-6

Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma: desen ve uygulama için bir rehber*. S. Turan (Çev.) Ankara: Nobel.

Milovanović, M., Takači, Đ, & Milajić, A. (2011). Multimedia approach in teaching mathematics – Example of lesson about the definite integral application for determining an area. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(2), 175–187. https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.519800

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Öztürk, M., Akkan, Y., & Kaplan, A. (2019). Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin temel matematik ispatlarını yapma sürecindeki bilişsel yapılar ve argümanları. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi, 8*(2), 429-452. http://dx.doi.org/10.30703/cije.490887

Pedemonte, B. (2002). Relation between argumentation and proof in mathematics: Cognitive unity or break? In J. Novotna´ (Ed.), *Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 70–80). Marienbad: ERME.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 40*(3), 385-400. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0085-0

Planas, N., & Morera, L. (2011). Revoicing in processes of collective mathematical argumentation among students. In M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of the VII Congress of the European Society of Research in Mathematics Education* (pp. 1356–1365). Reszów, Poland: ERME.

Sahin, A., & Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(3), 221–241. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9071-2

Schwarz, B. B. (2009). Argumentation and learning. In N. Muller Mirza & A. N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and Education: Theoretical Foundations and Practices* (pp. 91-126). Boston, MA: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98125-3_4

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 13-57. https://doi.org/10.1023/A:1014097416157

Solar, G., Ortiz, A., Deulofeu, J., & Ulloa, R. (2021). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52(7), 977-1005. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stephan, M., Cobb, C., & Gravemeijer, K. (2003). Coordinating social and individual analyses: Learning as participation in mathematical practices. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 12*, 67-102.

Stephan, M., & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 459-490. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00145-1

Tatar, E., & Zengin, Y. (2016) Conceptual understanding of definite ıntegral with geogebra, computers in the schools, 33(2), 120-132. https://doi.org/10.1080/07380569.2016.1177480

Tekin Dede, A. (2019). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(2), 292-314. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825

Topuz, F., & Gunhan, B.C. (2021). Türkiye'de matematik eğitimindeki argümantasyon çalışmalarının eğilimi nasıldır?. *Akdeniz Eğitim Araştırmaları Dergisi, 15*(36), 55-80. https://doi.org/10.29329/mjer.2020.367.4

Toulmin, S. E. (2003). *The Uses of Argument* (updated ed.). New York, NY: Cambridge University Press. (Original work published 1958).

Van de Walle, J.E. (1989). *Elementary School Mathematics*. Virjinia Commonwealth University.

Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 247–261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9114-8

Wood, T. (1998). Funneling or focusing? Alternative patterns of communication in mathematics class. In H. Steinbring, M. g. Bartolini- Bussi, & A. Sierpinska (eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167–178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(3), 222-255. https://doi.org/30035059

Yackel, E. (2004). Theoretical perspectives for analyzing explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. *Communications of Mathematical Education, 18*(1), 1-18. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Yin R. K. (2018). *Case study research and applications: Design and methods*, 6 th edition. London: Sage. https://doi.org/10.2307/749877