Cumhuriyet International Journal of Education, 11(2):301-320, 2022
DOI: https://doi.org/10.30703/cije.993425

Cumhuriyet International Journal of Education

| cije.cumhuriyet.edu.tr | Founded: 2011 Available online, ISSN: 2147-1606 Publisher: Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Determining the Epistemological Obstacles Regarding the Concepts of Infinity, Undefined and Uncertainty

Gülçin Oflaz[1,a,*], **Kübra Polat**[2,b]

[1]*Faculty of Education, Sivas Cumhuriyet University, Sivas, Turkey*
[2] *Faculty of Education, Sivas Cumhuriyet University, Sivas, Turkey*
**Corresponding author*

Research Article

Acknowledgment

History
Received: 13/09/2021
Accepted: 14/06/2022

iThenticate
This paper was checked for plagiarism using iThenticate during the preview process and before publication.

ABSTRACT

In this study, the answers given to the infinite, indefinite and undefined operations and the definitions of these concepts were examined together. By this way, the epistemological obstacles of these concepts were determined. In this context, epistemological obstacles were determined based on the perceptions of the mentioned concepts of the mathematics' students studying at the faculty of education and the faculty of science. The design of this study is basic qualitative research. The study group consists of 71 students studying at the faculty of education and the faculty of science. The data of the study were obtained by means of a two-part test prepared by the researchers. Data were analysed using descriptive analysis technique in order to identify the epistemological obstacles related to the concepts of infinity, undefined and uncertainty. As a result of the study, it was seen that the students' primary intuition, which they gained through their daily life experiences, did not change their perception of infinity much, despite their undergraduate education. It has been determined that the students confuse the concepts of undefined and indefinite and they think that operations with infinity are indefinite. Considering the development process of concepts in the history of mathematics and the difficulties faced by mathematicians in this process, mathematics students and pre-service teachers can be informed more. For this purpose, the History of Mathematics courses in undergraduate education programs can be presented to students by arranging them to increase their awareness of the development process of concepts and the difficulties experienced. Thus, concepts that took centuries to develop can become facts that students can use in their professional lives, instead of remaining as a hypothetical course content.

Keywords: *Infinity, uncertainty, undefined, epistemological obstacle, mathematics education*

Sonsuzluk, Tanımsızlık ve Belirsizlik Kavramlarına İlişkin Epistemolojik Engellerinin Belirlenmesi

Bilgi
**Sorumlu yazar*

Süreç
Geliş: 13/09/2021
Kabul: 14/06/2022

Bu çalışma ön inceleme sürecinde ve yayımlanmadan önce
iThenticate
yazılımı ile taranmıştır.

ÖZ

Bu sonsuz, belirsiz ve tanımsız işlemlere verilen cevapların ve bu kavramlara ait tanımların incelenerek kavramlara dair epistemolojik engellerin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda eğitim fakültesinde ve fen fakültesinde öğrenim gören matematik öğrencilerinin belirtilen kavramlara dair algılarından yola çıkılarak epistemolojik engelleri belirlenmiştir. Bu çalışmanın modeli, temel nitel araştırmadır. Çalışma grubunu Eğitim Fakültesi'nde ve Fen Fakültesi'nde öğrenim görmekte olan 71 öğrenci oluşturmaktadır. Çalışmanın verileri araştırmacılar tarafından hazırlanan ve iki bölümden oluşan test vasıtasıyla elde edilmiştir. Sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarıyla ilgili epistemolojik engelleri belirlemek amacıyla veriler betimsel analiz tekniği kullanılarak çözümlenmiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin günlük hayat deneyimleri yoluyla edindikleri birincil sezgilerinin lisans eğitimi almalarına rağmen sonsuzluk algılarını çok fazla değiştirmediği görülmüştür. Öğrencilerin tanımsız, belirsiz kavramlarını karıştırdığı ve sonsuzla yapılan işlemlerin belirsiz olduğunu düşündükleri tespit edilmiştir. Matematik tarihinde kavramların gelişim süreci ve bu süreçte matematikçilerin yaşadıkları zorluklar göz önüne alınarak matematik öğrencileri ve öğretmen adayları daha çok bilgilendirilebilirler. Bu amaçla lisans öğretim programlarında olan Matematik Tarihi dersleri, kavramların gelişim süreci ve yaşanan zorluklar hakkında farkındalıklarının artacağı şekilde düzenlenerek öğrencilere sunulabilir. Böylece gelişimleri yüzyıllar alan kavramlar farazi bir ders içeriği olarak kalmak yerine öğrencilerin profesyonel hayatlarında kullanabilecekleri olgular haline gelebilirler

Anahtar Kelimeler: Sonsuzluk, belirsizlik, tanımsızlık, epistemolojik engel, matematik eğitimi.

[a] erengulcin3@hotmail.com *https://orcid.org/0000-0002-5577-712X* | [b] *kubraapolaat@hotmail.com.tr* *https://orcid.org/0000-0001-8060-0732*

How to Cite: Oflaz, G., & Polat, K. (2022). Sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarına ilişkin epistemolojik engellerin belirlenmesi. Cumhuriyet International Journal of Education, 11(2):301-320

Giriş

Öğrenme, bir ilişkiler ağı kurmayı gerektirmektedir. Bu bağlantıların kurulması için de birey zihinsel olarak aktif olmalıdır. Dolayısıyla bilişsel şemaların bilgi oluşumunun hem ürünü hem aracı olduğu söylenebilir (Olkun ve Uçar, 2014). Öğrenme esnasında matematik bilgilerinin yeni bilgilerle ilişkilendirme sürecinde oluşan bir başarısızlık, kavramın tam olarak öğrenilmesine engel teşkil etmektedir. Bu da hata yapmaya neden olmaktadır (Skemp, 1976). Öğrenmenin önündeki engellerden biri olan öğrenci hatalarının ya da sahip oldukları kavram yanılgılarının belirlenmesi oldukça önemlidir. Ancak öğrenciyi hataya yönlendiren ve kavram yanılgılarının kökeninde olan faktörlerin, diğer bir ifadeyle öğrenme engellerinin belirlenmesi de ayrı bir önem taşımaktadır (Kanbolat, 2010).

Hatalar sadece bilgisizlik, kararsızlık ya da şansa bağlı durumların etkisiyle gerçekleşmemektedir. Daha önceden var olan doğru bilgiler yeni duruma adapte edilemezse yanlış bilgi haline gelir. Öğrenme ortamında beklenmedik bir durum olmayan bu tarz hatalar öğrenme engellerini oluşturur (Brousseau, 2002). Öğrenme engelleri ile ilgili olarak araştırmacılar tarafından bilişsel, kalıtsal ve psikolojik, didaktik, epistemolojik, ontogenetik ve kültürel engeller tanımlanmıştır (Cornu, 1991). Öğrenme sürecinde öğrencinin karşılaştığı zorluklar bilişsel engeller olarak tanımlanırken, öğrencinin kişisel gelişiminden kaynaklı engeller kalıtsal ve psikolojik engeller olarak tanımlanmaktadır. Öğrencinin bilişsel gelişim evresi ile ilgili olan engel, ontogenetik olarak adlandırılabilir. Kültürü oluşturan unsurlara ait bilgilerin öğrencilerde oluşturduğu zorluklar ise kültürel engeller olarak adlandırılmıştır. Öğretmenden ve tercih edilen öğretim yönteminin doğasından kaynaklı engeller ise didaktik engelleri oluşturmaktadır. Epistemolojik engeller ise matematiksel kavramın doğası ile ilişkilidir. Bir kavramın öğrenilmesiyle ilgili epistemolojik bir engel söz konusuysa, bu engelin, kavramın yani bilginin kendisinden kaynaklı olduğu söylenebilir. Eğitim alanında bu kavramın kabul edilmemiş olmasını yanlış bulan Gaston Bachelard tarafından ilk kez ortaya atılan epistemolojik engel kavramı, aşılması ve değiştirilmesi gereken sınırlar olarak ifade edilmektedir. Halihazırda bilinen şeylerin yeni şeyleri keşfetmeyi engellediği görüşüne dayanmaktadır (Theodoridis, 2017).

Epistemolojik engellerin öğrencilerin sorulara verdikleri hatalı cevaplarda ortaya çıktığı kabul edilmektedir (Brousseau, 1997; Cornu 1991). Bu hatalar rasgele yapılan hatalardan farklı olarak değişime dirençlidir. Oluşturulan bilginin bir parçası olarak görülmesi gereken bu hatalar, aynı zamanda öğrencinin öğrenme sürecinde karşılaştığı bilişsel engellerin varlığını da göstermektedir. Dolayısıyla problemin çözümünde yapılan bir hata, eksik öğrenme olarak değil de tamamlanmamış bilgi olarak değerlendirilmelidir (Brousseau, 1997). Epistemolojik engellerin üstesinden gelmek için zihinsel bir çatışmanın ve dolayısıyla didaktik bir durumun ortaya çıkması gerektiği öne sürülmektedir. Bir kavramın epistemolojik kökenine bağlı olan engeller, kimsenin kaçamayacağı engellerdir (Brousseau, 1997).

Matematiksel bilginin şu anda olduğu haline gelmesi, insanlığın başlangıcından beri devam eden bir süreçtir. Matematik tarihi incelendiğinde bazı kavramların gelişiminin matematikte krizlerin yaşanmasına neden olduğunu söyleyebiliriz. İlk ortaya çıktıklarında bazı tartışmalara neden olan kavramlar, doğalarında barındırdıkları zorluklar nedeniyle matematikçileri oldukça zorlamıştır. Öyle ki bu kavramların kabul edilmesi de zaman almıştır. Bu nedenle epistemolojik engeller matematik tarihiyle bağdaştırılarak incelenmektedir (Theodoridis, 2017). Bu bağlamda doğalarından kaynaklı zorluklar nedeniyle matematikçiler arasında tartışmaya neden olan bu kavramların, öğrenciler tarafından anlaşılmasında zorluklar yaşanması da oldukça doğal karşılanmalıdır. O halde matematik tarihi boyunca yaşanan bu tartışmaların ve zorlukların, öğrenciler için epistemolojik engel olarak karşımıza çıkmaktadır (Baştürk, 2013). Epistemolojik engeller, tarihsel gelişimi göz önüne alınarak incelendiğinde kavramların, günümüze kadar geçirmiş olduğu gelişimde ve değişimde saklıdır. Dolayısıyla matematik tarihinde karşılaşılan zorluklar, epistemolojik engellerin belirlenerek önlenmesinde kullanılabilir. Çünkü öğrencilerin yaşadıkları bazı zorluklar, matematik tarihi boyunca matematikçilerin yaşadıkları zorluklara benzerdir (Brousseau, 1997). Bununla birlikte Herscovics (1989) tarafından "bilişsel engel" olarak adlandırılan epistemolojik engellerden bazıları aldatıcı sezgisel deneyimlere güvenme eğilimi, genelleme eğilimi, doğal dilin neden olduğu engeller olarak belirtilmiştir (Moru, 2006).

Matematik tarihi incelendiğinde bazı matematiksel kavramlara ilişkin pek çok kriz yaşandığı görülebilir. İrrasyonel sayıların, negatif sayıların, sıfırın, Öklid dışı geometrilerin varlığının kabul edilmesi süreçleri bu krizlere örnek verilebilir. Sonsuzluk kavramı ve düşüncesi de benzer şekilde insanları rahatsız etmiştir. Tarih boyunca felsefe, bilim ve matematiğin temel kavramlarından sonsuzluk kavramı sezgilerimizin sonlu dünyadaki deneyimlere dayanmasından ötürü insan zihni için oldukça zorlayıcı bir unsur olmuştur (Tsamir ve Dreyfus, 2002). Belki de bu yüzden sonsuzluk hakkında konuşmaktan kaçınılmıştır. Nitekim psikolojinin hatta temel bilimsel kavramlarla ilgili sonsuz yeni fikir ve bakış açısının kaynağı Piaget'nin sonsuzlukla ilgili bu kadar az şey yapması oldukça şaşırtıcı olarak nitelendirilmiştir (Fischbein vd., 1979).

Sonsuzluk, insanlık tarihi boyunca anlaşılması güç bir olgu olarak karşımıza çıkmıştır. Yaşadığımız sonlu dünyada sonsuzluğu anlama çabası eskiden olduğu gibi şu anda da insanları zorlamaktadır. İnsanlığın düşünce tarihi boyunca sonsuzluk hakkında yapılan tartışmalar, paradokslar bugün sonsuzluğu anlamlandırma şeklimize ışık tutabilir. Zihinsel olarak varlığını kabul ettiğimiz ancak fiziksel olarak anlamlandıramadığımız sonsuzluk kavramı, ilk defa Zeno tarafından paradokslarla ortaya konmuştur (Öztürk, 2018). Zeno bir ok atıldığında öncelikle hedefe kadar olan yolun yarısını alması gerektiğini, o yolun yarısını alması için de tüm yolun dörtte birini, o yolun yarısını alması için de tüm yolun sekizde birini alması gerektiğini söyler. Okun hedefe kadar alması gereken yol bu şekilde devam edeceğinden ok asla hareket edemez ve hedefe varamaz. Mantıken düşünüldüğünde bu açıklama doğru gibi görünse de aslında bu şekilde olmadığını biliriz.

Sonraki zamanlarda Aristo'nun potansiyel sonsuzluk anlayışı hâkim olmuştur. Bir şeyin daha önce belirlediğimiz bir büyüklüğün ötesine geçecek kadar çoğalma ya da büyüme potansiyeline sahip olması, potansiyel sonsuzluk olarak ifade edilmektedir. Uzun zaman boyunca felsefeciler ve matematikçiler aktüel ve potansiyel sonsuzluk üzerinde çalışmışlardır. Dünyanın sonsuzluğu, sayıların sonsuzluğu gibi zihnimizin zor bulduğu ve kavramasının neredeyse imkânsız olduğu sonsuzluk, aktüel sonsuzluktur. Her an sonlu olan ancak sonsuza kadar devam eden süreçlerin düşünülmesi ise var olmayan ancak kabul ettiğimiz potansiyel sonsuzluktur. Doğal sayılar kümesinin tamamını düşünemeyiz. Ancak bir doğal sayıdan sonra diğerinin geldiğini biliriz (Fischbein, 2001). İşte bu nedenle tarih boyunca sonsuzluk ile ilgili birbirine zıt düşüncelerin varlığı matematikte sayısız paradoks ve zorluğa neden olmuştur. Öyle ki Aristo sonsuzluğun potansiyel olduğunu asla aktüel olamayacağını iddia etmiştir (Tirosh, 1991). Nitekim Aristo, aktüel sonsuzluğu ise zamanın bir anında sonsuz şimdiki zaman olarak tanımlamaktadır. Bu tanımlama ise tüm zamanı gerektirmektedir. O'na göre bu anlaşılmazdı ve sonsuz bu şekilde kavranırsa, bunun ancak zaman içinde potansiyel bir sonsuzluk olarak anlaşılabileceğini savunuyordu (Dubinsky vd, 2005).

Cantor'a kadar Aristo'nun sonsuzluk anlayışı temel alınmıştır. Cantor'un bahsettiği sonsuzluk insan varoluşu gibi gerçek bir durum olmakla birlikte aktüel sonsuzluğa işaret etmektedir (Karakaya ve Sekman, 2019). Cantor'a göre tek başına anlamlı olmayan sonsuzluk, küme kavramı ile kullanıldığında anlamlı hale gelir. O'na göre ancak kümelerin sonsuzluğundan bahsedilir. Cantor kümeleri sonlu-sonsuz olmak üzere ikiye ayırmakta, sonsuz kümeleri ise sonsuzluklarına göre çeşitli sınıflara ayırmaktadır (Ülger, 2004). Cantor'un kümeler teorisiyle sezgisel sonsuzluk anlayışı yerini hiyerarşik olarak organize edilmiş bir sonsuzluğun kabulüne bırakmıştır. Böylelikle sonsuzluk diğer matematik kavramlarıyla uyumlu ve tutarlı hale gelmiştir (Fischbein, Tirosh ve Hess, 1979).

Sonsuzluk kavramında epistemolojik engellerin pek çok kişi için var olduğu söylenebilir. İşte bu engeller, öğrencilerin "tek sonsuz" (örneğin bütün sonsuz kümler eşittir), "kıyaslanamaz" (sonsuz kümeler karşılaştırılamaz) gibi yanılgılara düşmesine neden olmuştur (Tsamir ve Dreyfus, 2002). Sonsuzluk kavramının gerçek dünya deneyimlerine bağlanması zordur. Bu nedenle sonsuzluğun, zihinsel olarak görselleştirme yeteneğimize bağlı olduğundan anlaşılması da zordur (Kolar ve Čadež, 2012).

Yapılan alan yazın taraması sonucunda, her seviyedeki birçok öğrencinin, öğretmen adayının, öğretmenin sonsuzluk kavramını anlamlandırmada güçlük çektikleri ve çeşitli kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür (Çelik ve Akşan, 2013; Kolar ve Čadež, 2012; Sırmacı ve Gökkurt Özdemir, 2016; Theodoridis, 2017). Sonsuzluk pek çok matematikçinin, filozofun üzerinde düşündüğü bir konu olmakla beraber diğer insanlar tarafından belki sebep olduğu çelişkiler ve paradokslar nedeniyle belki de oldukça soyut olması nedeniyle konuşulmaktan çekinilecek bir konu olmuştur. Dolayısıyla farklı düzeylerde ve farklı pozisyondaki kişilerin bu kavrama ilişkin güçlük yaşıyor olmaları belki de sonsuzluk kavramı üzerine yeteri kadar düşünülmemesinden kaynaklanıyor olabilir.

Sonsuzluk gibi tanımsızlık ve belirsizlik kavramları da zorlanılan ve birbiriyle karıştırılan konulardır. Pek çok kişi tarafından bu iki kavram arasındaki fark net biçimde ortaya konulamamaktadır (Özmantar ve Bozkurt, 2013). Tanımsızlık ile ilgili olarak felsefi dil ve matematiksel dil olmak üzere iki farklı kullanımından söz edilebilir. Matematiksel olarak tanımsızlık tanımı iki açıdan ele alınmaktadır. Birincisi herkesin zaten ne olduğunu bildiği ki bu durum sezgisel gerçeklik olarak ifade edilmektedir, ikincisi ise ispat adımlarında herhangi bir adımın gerekçesi olmamasından dolayı Öklid sistemi içerisinde bir değerinin olmamasından kaynaklı kullanımdır (Angelo, 2009). Epistemolojik engeller hem bilimsel düşüncenin tarihsel gelişiminde hem de eğitim deneyimlerinde ortaya çıkmaktadır ve hedef bilginin tanımlanması için gereklidir (Theodoridis, 2017). Tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarındaki epistemolojik engel tarih boyunca sıfır sayısı ve sonsuzluk ile ilgili tartışmalarla bağdaştırılabilir. Nitekim belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarında sıfır sayısı ile yapılan işlemler söz konusudur.

Bu çalışmada gerek sonsuz, belirsiz ve tanımsız işlemlere verilen cevaplar gerekse bu kavramlara ait tanımlar birlikte incelenerek bu kavramlara dair epistemolojik engeller ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Nitekim tanımlar, kavramsal anlamanın gerçekleşip gerçekleşmediği konusunda yol gösterici olabilir. Tanımın anlaşılması veya bir kavramın doğru biçimde tanımlanması kavramsal anlama açısından önemlidir. Çalışmada öğretmen adayları ve fen fakültesi matematik öğrencilerinin bu kavramları nasıl tanımlandığının ve işlemleri nasıl yaptığının analiz edilmesiyle farklı gruplardaki epistemolojik engeller hakkında fikir verebilmesi umulmaktadır. Nitekim epistemolojik engel kavramını ortaya atan Bachelard (1972) bu kavramın eğitim alanında kabul edilmediğini eleştirmektedir (Theodoridis, 2017). Bu bağlamda araştırmanın farklı eğitim programlarına tabi olmakla beraber matematikle yakından ilişkili iki farklı öğrenci grubunun bu kavramlara yaklaşımı incelenerek epistemolojik engellerin ortaya çıkarılmasının bu kavramların öğretiminde izlenecek yol hakkında fikir verebileceği düşünülmektedir.

Yöntem

Araştırmanın Modeli

Nitel araştırma paradigmasının benimsendiği bu çalışma, temel nitel araştırmadır. Temel nitel araştırma tüm disiplin alanlarında ve pratikte uygulama alanlarında görülebilir. Bu araştırma türü temel ve yorumlayıcı çalışmalar olarak değerlendirilmektedir. Bu araştırmalarda araştırmacı fenomenin anlamını fenomene katılanlara göre anlamaya çalışır. Yani temel nitel araştırmanın amacı anlamları açığa çıkarmak ve yorumlamaktır (Merriam, 2018). Dolayısıyla bu çalışma, öğrencilerin sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlikle ilgili tanımlarından ve verilen ifadeleri açıklamalarından yola çıkılarak belirtilen kavramlara ilişkin epistemolojik engellerin yorumlanmaya çalışılması sebebiyle, temel nitel araştırma olarak modellenmiştir.

Çalışma Grubu

Bu araştırmanın çalışma grubunu İç Anadolu'da bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi'nde ve Fen Fakültesi'nde öğrenim görmekte olan 71 öğrenci oluşturmaktadır. 2019-2020 öğretim yılının bahar döneminde Eğitim Fakültesi'nde öğrenim gören 54 son sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adayı ve Fen Fakültesi'nin matematik bölümünde son sınıfta öğrenim gören 17 öğrenci ile çalışılmıştır. Bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının ve matematik bölümü öğrencilerin sonsuzluk, tanımsızlık, belirsizlik kavramlarına ilişkin epistemolojik engellerinin birbirinden farklılaşıp farklılaşmadığı da araştırıldığından amaçlı örnekleme tekniği ile çalışma grubu belirlenmiştir. İlköğretim matematik öğretmenliği öğrencileri Ö1, Ö2, … şeklinde ve matematik bölümü öğrencileri ise F1, F2, … şeklinde kodlanmıştır.

Verilerin Toplanması

Çalışmanın verileri öğrencilere uygulanan bir test vasıtasıyla elde edilmiştir. Araştırmacılar tarafından oluşturulan bu test iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde öğrencilerden sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarını kendi cümleleri ile açıklamaları, ikinci bölümde ise $\infty/0$, $0/0$, $3.\infty$, $3/\infty$ ifadelerini matematiksel olarak açıklamaları istenmiştir. Bu sayede öğrencilerin belirtilen kavramlara ilişkin tanımlarından ve matematiksel açıklamalarından farklılıkların ve epistemolojik engellerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Öğrencilere kendi ders saatlerinde uygulanan testin tamamlanması yaklaşık 30 dakika sürmüştür.

Verilerin Analizi

Sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarıyla ilgili epistemolojik engelleri belirlemek amacıyla yapılan bu araştırmada veriler betimsel analiz tekniği kullanılarak çözümlenmiştir. Betimsel analizde veriler, daha önceden belirlenmiş temalara göre yorumlanmaktadır. Temaların ilişkilendirilmesi, betimlenmesi, elde edilen neden-sonuç ilişkilerinin yorumlanması betimsel analizle amaçlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu çalışmada da elde edilen veriler araştırmanın alt problemleri bağlamında incelenerek belirlenen temalara göre yorumlanmıştır.

Verilerin analiz sürecinde araştırmacılar öncelikle öğrenci cevaplarını tek tek incelemişlerdir. Epistemolojik engel bağlamında öğrencilerin sonsuzluk, tanımsızlık, belirsizlik kavramlarına ilişkin tanımlarına ilişkin kodlamalar yapılmıştır. Daha sonra benzer içeriğe sahip olan matematiksel işlemler de aynı kodlarla adlandırılmıştır. Bu kodlar tekrar gözden geçirilerek benzerlik ve farklılıklarına göre yeniden düzenlenmiş ve kategoriler oluşturulmuştur. Elde edilen veriler oluşturulan kodlar ve kategorilerle ifade edilerek örnek öğrenci cevaplarına da yer verilerek daha iyi anlaşılması sağlanmıştır.

Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirliğin önemli bir ölçütü, toplanan verilerin ayrıntılı olarak rapor edilmesi ve araştırmacının sonuçlara nasıl ulaştığını ayrıntılı olarak açıklamasıdır (Cohen, Manion ve Morrison, 2000). Bu çalışmada da veri toplama ve analiz süreci, olduğu gibi açık ve ayrıntılı bir şekilde rapor edilmiştir. Kodların ve kategoriler araştırmacılar tarafından önce tek tek oluşturulmuş, daha sonra bir araya gelerek kod ve kategorilere son hali verilmiştir. Analiz sürecinin ilk aşamasında bağımsız çalışan araştırmacılar tarafından kodlanan veri setinin benzerlik oranı önem taşımaktadır (Fidan ve Öztürk, 2015). Nitel araştırmanın güvenirlik ölçütü olarak kabul edilen bu benzerlik oranının en az %80 olması gerekmektedir (Miles ve Huberman, 1994). Bu çalışmada kodlama işlemini ayrı ayrı yapan araştırmacılar daha sonra bir araya gelerek oluşturdukları kodları karşılaştırmışlar ve benzerlik oranını %92,6 olarak bulmuşlardır. Bu oran çalışmanın güvenirliği için yeterli kabul edilmektedir.

Araştırmanın Etik İzinleri

Yapılan bu çalışmada "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Yönergenin ikinci bölümü olan "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

Etik kurul izin bilgileri

Etik değerlendirmeyi yapan kurul adı = Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Etik değerlendirme kararının tarihi= 01.03.2021

Etik değerlendirme belgesi sayı numarası= E-60263016-050.06.04-29097

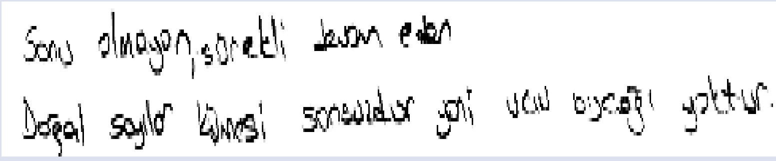
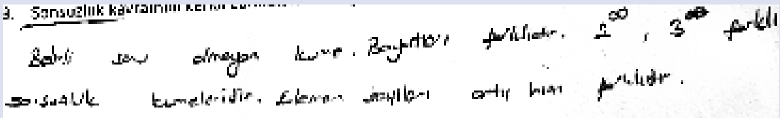
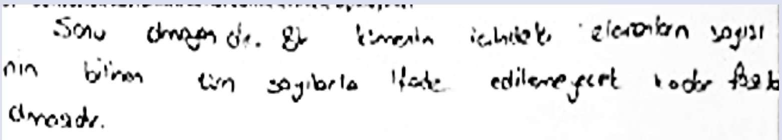
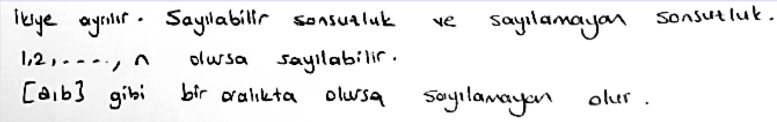
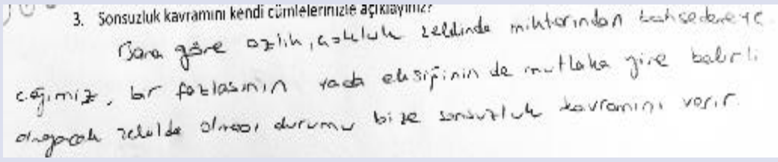
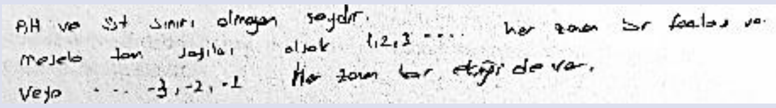
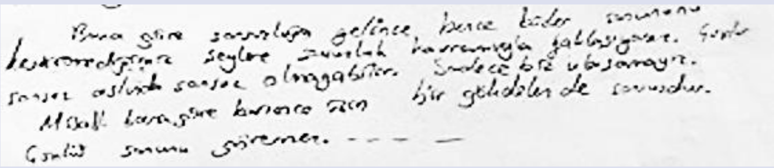
Bulgular

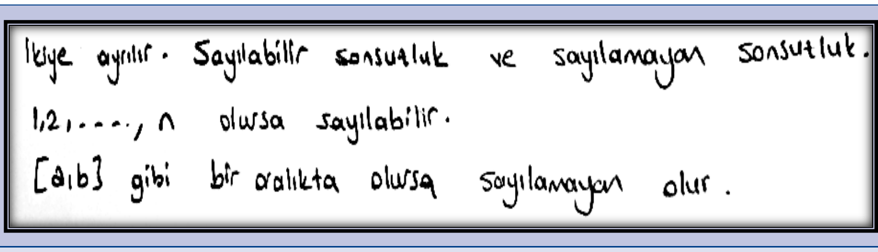
Araştırmacılar tarafından oluşturulan veri toplama aracından edinilen veriler iki aşamada analiz edilmiştir. İlk bölümde sunulan bulgular öğrencilerin sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarına ilişkin açıklamalara yöneliktir. İkinci bölümde sunulan bulgular ise $\infty/0$, $0/0$, $3.\infty$, $3/\infty$ ifadelerini matematiksel olarak açıklamalarına yöneliktir.

Çizelge 1 öğrencilerin sonsuzluk tanımlarına ilişkin kodlarını göstermektedir. Öğrencilerin sonsuzluğu eylemsel, aktüel, potansiyel ve duygusal olarak değerlendirdikleri, ayrıca küme olarak ele aldıkları da görülmektedir.

Sonsuzluk, Tanımsızlık ve Belirsizlik Kavramlarına Yönelik Açıklamalara İlişkin Bulgular

Çizelge 1. Öğretmen adaylarının ve matematik bölümü öğrencilerinin sonsuzluk tanımlarına ilişkin kodlar

Kod	f	Açıklama	
Eylemsel sonsuzluk	66	 Sonu olmayan, sürekli devam eden. Doğal sayılar kümesi sonsuzdur yani ucu bucağı yoktur.	(Ö72)
		 Belirli sonu olmayan küme. Boyutları farklıdır. 1^{∞}, 3^{∞} farklı sonsuzluk kümeleridir. Eleman sayıları artık [illegible] farklıdır.	(Ö58)
Küme		 Sonu olmayandır. Bir kümenin içindeki elemanların sayısının bilinen tüm sayılarla ifade edilemeyecek kadar fazla olmasıdır.	(Ö57)
	13	 İkiye ayrılır. Sayılabilir sonsuzluk ve sayılamayan sonsuzluk. 1,2,...., n olursa sayılabilir. [a,b] gibi bir aralıkta olursa sayılamayan olur.	(Ö27)
Aktüel sonsuzluk	5	 3. Sonsuzluk kavramını kendi cümlelerinizle açıklayınız? Bana göre azlık, çokluk şeklinde miktarından bahsedersek mutlaka yine belirleyeceğimiz bir fazlasının yada eksiğinin de olacak şekilde olması durumu bize sonsuzluk kavramını verir.	(Ö68)
Potansiyel sonsuzluk	4	 Alt ve üst sınırı olmayan sayıdır. Mesela tam sayılar olsak 1,2,3 .... her zaman bir fazlası var. veya ... -3, -2, -1 her zaman bir eksiği de var.	(Ö66)
Duygusal sonsuzluk	1	 Bana göre sonsuzluğa gelince, bence [illegible] kavramadığımız şeylere sonsuzluk kavramıyla yaklaşıyoruz. [illegible] sonsuz aslında sonsuz olmayabilir. Sadece biz ulaşamıyoruz. Misal bana göre [illegible] bir gökdelen de sonsuzdur. Çünkü sonunu göremez. ----	(Ö56)


İkiye ayrılır. Sayılabilir sonsuzluk ve sayılamayan sonsuzluk. 1,2,...., n olursa sayılabilir. [a,b] gibi bir aralıkta olursa sayılamayan olur.

Resim 1. Ö27 kodlu öğrenciye ait açıklama

Öğrencilerin çok büyük bir kısmı sonsuzluğu eylemsel olarak değerlendirmişlerdir. Açıklamalarını ise genellikle "sonu olmayan" ile "başı ve sonu olmayan" ifadelerini kullanarak yapmışlardır. Bu açıklamalarda öğrencilerin geneli ifadenin sonunun olmamasına odaklanmışlardır. Bazı açıklamaların "sonu ve sınırı olmayan" şeklinde olduğu bazılarının ise sadece "sonu olmayan" şeklinde olduğu görülmüştür. Bazı öğrenciler "*sınırsız sayıda olan kavramlara sonsuz kavram denir*" demiştir. Ö21 kodlu öğrenci ise sonsuzluğu "*sayı olmayan çokluk belirten ifade*" olarak düşünmektedir. Bu öğrencilerin sonsuzluğu ifadenin, kavramın belirli bir sınırda olmaması durumu şeklinde açıkladıkları görülmektedir.

Öğrenci cevapları incelendiğinde sonsuzluğu küme kavramıyla ilişkilendiren öğrencilerin açıklamalarını sayılabilen ve sayılamayan sonsuz kümelerle ilişkilendirerek yaptıkları görülmüştür. Sonsuzluğu tanımlarken sayıların sonsuzluğunu düşünen bir öğrenci ifadesi "*bir kümenin elemanlarını sıraladığımızda son ifade bulunmuyorsa küme sonsuzdur*" şeklindedir. Ayrıca açıklamalara göre sayılara vurgu; sayı dizisi, doğal sayı, tamsayı, sonu olmayan sayılar topluluğu, sayılar ve rakamlar, sayı doğrusu ifadeleri ile yapılmıştır. Öğrencilerin sonsuzluğu sonsuz sayılarla bağdaştırıldıkları söylenebilir.

Öğrencilerin sonsuzluğu potansiyel ve aktüel olarak algıladıkları da anlaşılmaktadır. Örneğin; Ö72 kodlu öğrenci, "sonsuzluğu sonu olmayan sürekli devam eden" açıklamıştır. Bu tanım potansiyel sonsuzluk bağlamında incelenmekle birlikte devam eden bir sürece de vurgu yaptığı için eylemsel sonsuzluk kategorisine de dâhil edilmiştir. Aktüel sonsuzluk bağlamında değerlendirilen öğrenciler sonsuzluğu mantıken doğru olan ancak fiziksel olarak mümkün olmayan olaylar üzerinden açıklamışlardır. Bir öğrenci verdiği örnekle bir elmayı sürekli ikiye bölerek sonsuz kavramına ulaşabileceğini düşünmüştür. Bu, mantıken doğru gibi görünse de gerçekte böyle bir durum yaşanmaz. Cevabı aktüel sonsuzluk bağlamında değerlendirilen Ö56 da bir harmonik seri örneği vermiş ve harmonik seriyi kendi düşüncesiyle açıklamıştır; "*Bizler her gün bir şey yaparsak sonsuzluğa ulaşırız. Buradaki kural her gün az da olsa bir şey yap. İster yeni bir yer keşfet ister yeni bir bilgi öğren. Ama o günün boşa gitmesin. Bu seriye ne açıdan baktığımıza göre değişir. Eğer inancınız varsa, her gün yapılan ibadetler bizi cennete, sonsuzluğa götürür gibi yorumlayabiliriz. Kısaca slogan; küçük adımlar büyük adımları doğurur*." Burada öğrencinin harmonik seriden yola çıkarak sonsuzluk anlayışını ifade edişini görmekteyiz. Birincil sonsuzluk algısının bileşeni olarak manevi boyut, duygusal sonsuzluk olarak ifade edilmiştir. Bu öğrencinin cevabı ayrıca duygusal sonsuzluk boyutu altında da incelenmiştir.

Öğrencilerin yapmış oldukları açıklamaların bazıları birden fazla kodun altında verilmiş bazıları ise herhangi bir kod altında verilmemiştir. 6 öğrencinin sonsuzluğa ilişkin açıklamaları herhangi bir kod altında toplanmayıp ilgisiz açıklama olarak değerlendirilmiştir. Öğrencilerden biri sonsuzluğa ilişkin açıklamasında "sonu belli olmayan" ifadesini kullanmıştır. Bu ifade öğrencide sonsuzluğa ilişkin bir belirsizliğin var olduğuna işaret etmektedir. Nitekim öğrenci cevaplarından sonsuzluğun belirsizlik olarak düşünüldüğü ve bu nedenle sonsuz ile yapılan işlemlerin de belirsiz olacağını düşündükleri görülmüştür. F2 kodlu öğrenci sonsuzluğun tanımına ilişkin hiçbir açıklama yapmamıştır ve hiçbir kod altında yazılmamıştır. Ö43 "*iki ya da daha fazla sayı arasında birbirine yakın ya da uzak değerlerin sayısına sonsuzluk denir*" açıklaması ilgisiz açıklama olarak değerlendirilmiş ve herhangi bir kategoriye dahil edilmemiştir.

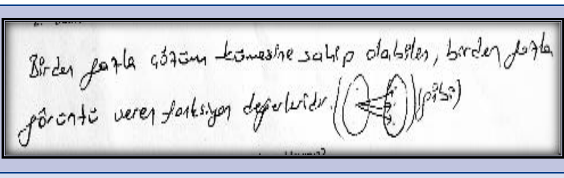
Çizelge 2 incelendiğinde öğretmen adaylarının ve matematik bölümü öğrencilerinin belirsizliğe ilişkin kodları belirsiz terim, belirsiz değer ve belirsiz form olarak oluşturulmuştur. Açıklamalar belirsiz değerde yoğunlaşırken, en az belirsiz terim açıklaması yapılmıştır. 20 öğrencinin ise ilgisiz açıklama yapmaları ilgi çekici bir bulgu olarak değerlendirilebilir.

Belirsizlikle ilgili yapılan açıklamalar incelendiğinde belirsiz değer kategorisinde değerlendirilen açıklamalarda öğrencilerin fonksiyon kavramına değindikleri görülmüştür. Ö34 kodlu öğrenci tanım kümesine değinerek belirsizliği "*tanım kümesi belli olmayan*" şeklinde açıklarken, Ö67 kodlu öğrenci "*birden fazla çözüm kümesine sahip olabilen, birden fazla görüntü veren fonksiyon değerleridir*" şeklinde açıklama yapmıştır. (Resim 2) Ancak matematik öğretmen adayının fonksiyon olarak vermiş olduğu örneğin fonksiyon olmadığını göz önüne alınırsa, belirsizlik kavramını açıklamaya ilişkin olarak öğretmen adaylarının kafasının karışık olduğunu söylenebilir. Esasında bu durum çalışmanın birçok bulgusunda görülmüş olup bu kavramları düşünmek ve konuşmaktan uzak durulmasının pek çok engele sebep olduğu düşünülmektedir.

Belirsiz değer kategorisinde değerlendirilen cevaplar incelendiğinde öğrencilerin Resim 3 verilen açıklamaya benzer açıklamalar yaptıkları görülmüştür. Matematik bölümü öğrencilerinden de bu açıklamayı yapanlar mevcuttur. Dolayısıyla bu açıklamalarla daha önceden derslerinde veya ders kitaplarında karşılaşan öğrenciler bu konu hakkında yorum yapabilmektedirler.

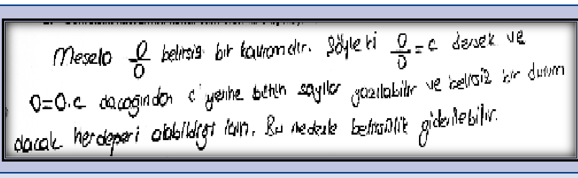
Çizelge 2. Öğretmen adaylarının ve matematik bölümü öğrencilerinin belirsizlik tanımlarına ilişkin kodlar

Kod	f	Öğrenci açıklamaları	
Belirsiz değer	49	Mesela $\frac{0}{0}$ belirsiz bir kavramdır. Şöyle ki $\frac{0}{0}=c$ dersek ve $0=0.c$ olacağından c yerine bütün sayılar yazılabilir ve belirsiz bir durum olacak herdeğeri alabilirdi için. Bu nedenle belirsizlik giderilebilir.	(Ö46)
		İncelenen her durumda farklı bir sonuç elde edilmesiyle ifade edilebilir.	(F1)
Belirsiz form	19	$\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ gibi iki sonlu olmayan kavramların ilişkisi	(Ö54)
Belirsiz terim	7	Bir yargıya ve ya bir sonuca varılamamış. Tüm herhangi bir hüküm olmayan ifadeler. Ne olduğu belli olmayan	(Ö51)
		matematiksel karşılığı tam olarak açıklanamayan tanımlı ancak belirli değil.	(Ö52)



Birden fazla çözüm kümesine sahip olabilen, birden fazla görüntü veren fonksiyon değerleridir.

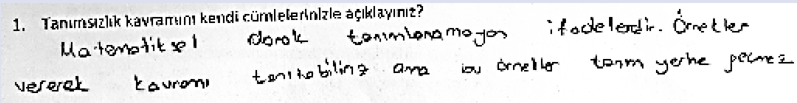
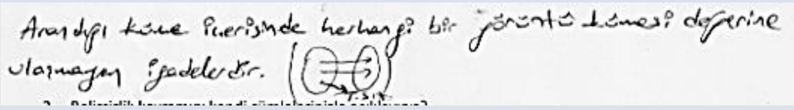
Resim 2. Ö67 kodlu öğrenciye ait açıklama



Mesela $\frac{0}{0}$ belirsiz bir kavramdır. Şöyle ki $\frac{0}{0}=c$ dersek ve $0=0.c$ olacağından c yerine bütün sayılar yazılabilir ve belirsiz bir durum olacak her değeri alabildiği için. Bu nedenle belirsizlik giderilebilir.

Resim 3. Ö46 kodlu öğrenciye ait açıklama

Çizelge 3. Öğretmen adaylarının ve matematik bölümü öğrencilerinin tanımsızlığa ilişkin kodlar

Kod	f	Öğrenci açıklamaları	
Terim	43	 1. Tanımsızlık kavramını kendi cümlelerinizle açıklayınız? Matematiksel olarak tanımlanamayan ifadelerdir. Örnekler vererek kavramı tanıtabiliriz ama bu örnekler tanım yerine geçmez	(Ö57)
Değer	32	 0 den farklı bir reel sayı için : x/0 tanımsızdır.	(F17)
Durum	5	 Aradığı küme içerisinde herhangi bir görüntü kümesi değerine ulaşmayan ifadelerdir.	(Ö67)

Belirsiz form kategorisinde değerlendirilen F7 kodlu öğrencinin açıklaması incelendiğinde öğrenci 0/0 belirsizliğini örnek olarak vermiş ve sıfıra ilişkin açıklama yapmıştır. Öğrencinin sıfır için "olmayan şeyi olmayan şeye bölmeye" ilişkin söylemi bu çalışmada değinilen epistemolojik engellerden olarak değerlendirilebilir. Aynı koda ilişkin açıklamalar incelendiğinde öğrencilerin belirsizliğin giderilebileceği vurgusunu burada yaptıkları görülmektedir. Belirsizliğin giderilmesi için yüksek matematik, ileri işlemler kullanmanın gerekliliğine değindikleri göze çarpmaktadır. Bu durum öğrencilerin limitte karşılaştıkları belirsizliği belirsiz form olarak değerlendirdikleri anlamına gelmektedir. Ö41 kodlu öğretmen adayının açıklaması "sonsuzluk varsa belirsizlik vardır" şeklindedir. Bu durum öğrencilerin sonsuzluğun belirsiz bir kavram olduğunu düşünmelerinden kaynaklanmaktadır. Bu durum derinlemesine incelenmesi gereken bir durumdur. Nitekim kavramlara ilişkin bu görüşler sonsuzluğun epistemolojik engellerinin bu kavramların anlaşılmasını zorlaştırdığını düşündürmektedir.

Çizelge 2 incelendiğinde 7 öğrencinin cevabının belirsiz terim kategorisinde olduğu görülmektedir. Öğrencilerin belirsizlik kavramını açıklamak için "*matematiksel olarak karşılığı tam olarak açıklanamayan, belirli olmayan*" gibi daha çok sözlük anlamına vurgu yaptıkları görülmüştür. Bu nedenle öğrencilerin cevapları belirsiz terim kategorisinde incelenmiştir.

Öğrencilerin bir kısmının yaptıkları açıklamalar ilgisiz bulunmuştur. Örneğin; Ö14 kodlu öğrencinin "*tanımsız olarak belirlenemeyen ama tam da bir değer alamayan, gerekli işlemlerle tanımlı olan küme*" açıklamasında görüldüğü üzere öğrencinin belirsizliği açıklarken tanımsız ifadesini kullandığı, ifadenin çok da anlaşılır olmadığı görülmektedir. Benzer şekilde öğrencilerin tanımlılık, tanımsızlık gibi ifadelerle belirsizliği açıklamaya çalıştıkları görülmektedir. Bu esasında bu çalışmanın konusu olan kavramların öğrenciler tarafından karıştırıldığına ilişkin başka bir bulgudur.

Çizelge 3 incelendiğinde öğrenci cevaplarının tanımsız terim, tanımsız değer, tanımsız durum, olarak kategorize edilebileceği görülmektedir. Öğrencilerin çoğunun tanımsızlığı terim olarak ele aldığı söylenebilir. 10 öğrencinin cevabı ise ilgisiz olarak değerlendirilmiştir.

Öğrencilerden büyük çoğunluğu matematiksel olarak tanımlanamayan nesneleri örnek vererek tanımsızlığı açıklamaya çalışmışlardır. Bu açıklamalar tanımsız terim kategorisi altında incelenmiştir. Tanımsızlığı sayının sıfıra bölümünün tanımlanamayan bir değer olması ile ilişkilendiren öğrenci cevapları, tanımsız değer kategorisi altında incelenmiştir. Üzerinde çalışılan matematiksel sistemin tanım kümesinden dolayı değeri tanımlanamayan matematiksel bir yapı ise tanımsız durum olarak adlandırılmıştır.

Tanımsızlığı değer olarak ele alan Ö41 kodlu öğrenci "*kesirlerde payda da sıfır olup pay sıfırdan farklı olunca ortaya çıkan bir durumdur. Cevabı yoktur. Hemen bulamayız. Farklı işlemler uygulayarak mesela limit buluruz*" şeklinde tanımsızlığın limitle giderilebileceğini söylemiş. Bu durumda belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarının birbirine karıştırıldığını söyleyebiliriz. Benzer durum öğrencilerin verilen örneklerin belirsizlik mi tanımsızlık mı olduğunu açıklamalarını istediğimizde de göze çarpmaktadır. Yapılan analiz sonucu öğrencilerden bir kısmı tanımsızlık tanımını açıklamalarla ifade ederken bir kısmı örnek vererek açıklamaya çalışmıştır. Öğrencilerin örnek vererek açıklamaya çalışmaları bu çalışmanın diğer bulgularında da görülmüştür. Bir öğretmen adayı tanımsız durum, tanımsız değer ve tanımsız kavram terimlerine ayrıntılı biçimde değinmiş olması, bu terimlere alan eğitimi derslerinde karşılaşmış olmalarından kaynaklandığı düşünülebilir.

Çizelge 4. ∞/0'a ilişkin Kategori ve Kodlar

∞/0	Kategori	Kod	f	Öğrenci açıklamaları	
	Tanımsız	Tanımsız değer Parça-bütün Bölme tanımı	13 7 21	j) $\frac{\infty}{0}$. Tanımsızdır. Çünkü paydayı tanımsız yapan değer sıfırdır.	(F13)
				j) $\frac{\infty}{0}$. → Tanımsız Değeri yoktur.	(Ö39)
				j) $\frac{\infty}{0}$. tanımsız $\frac{\infty}{0} = a \Rightarrow a.0 \neq \infty$ eşitlik sağlanmadı. bu yüzden tanımsız	(Ö7)
				j) $\frac{\infty}{0}$. Tanımsız. Sonsuz çokluktaki bir ifadeyi, hiçlik manasındaki "0"'a bölmek ifadeyi belirli sonuca ulaştırmaz. Tanımsızdır.	(Ö33)
				j) $\frac{\infty}{0}$. tanımsız, tanımlayamadığımız bir sonuca ulaşamadığımızdan dolayı	(Ö22)
				j) $\frac{\infty}{0}$. $\frac{\infty}{0} = x$ $\infty = x.0$ sıfır sayısını [illegible] alırsak sonuç sıfır. ∞ sayısını [illegible] sonsuz sonsuz. Dolayısıyla belirsizlik vardır.	(F8)
	Belirsiz	Belirsiz değer Bölme tanımı	9 2	j) $\frac{\infty}{0}$. belirsiz, çünkü belli bir sayı yok payda.	(Ö41)
				j) $\frac{\infty}{0}$. Belirsiz ∞'u 0 parçaya bölersek belli bir şeye ulaşamayız.	(Ö34)
				j) $\frac{\infty}{0}$. Belirsizdir. 0 bütünün ∞ parçasını alıyoruz. Olmayan bir bütün var ve onun sayılamayacak kadar parçasını alıyoruz.	(Ö29)
				j) $\frac{\infty}{0}$. belirsiz. sonsuz büyüklükte bir sayıyı yeterince küçük bir sayıya böldüğümüzde her ikisinde hangi[illegible] arasındaki büyük ve de fark [illegible] bilmediğimizden belirsizdir.	(Ö18)
				j) $\frac{\infty}{0}$. Belirsiz Hem sonsuzu bilmediğimizden hem de bir sayının içinde kaç sıfır olduğunu belirleyemeyeceğimizden.	(Ö27)
				j) $\frac{\infty}{0}$. Belirsiz $\frac{\infty}{0} = x \Rightarrow \infty = x.0$ tanımsız	(Ö47)
	Sonsuz	Parça- bütün ilişkisi	2	j) $\frac{\infty}{0}$. ∞ sonsuz sayı içerisinde sonsuz 0 olabilir.	(Ö19)

Nitekim Ö32 kodlu öğrencinin açıklaması "*matematiksel anlamda tanımsızlık sezgilere ve bu kelimenin sözlük anlamına bırakılarak kullanılmaktadır*." şeklindedir.

Sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarına ilişkin bulgulara bütüncül olarak bakıldığında matematik bölümü öğrencileri ve öğretmen adaylarının bu kavramlara ilişkin açıklamalarının çok fazla farklılaşmadığını söylenebilir.

$\frac{\infty}{0}, \frac{0}{0}, 3.\infty, \frac{3}{\infty}$ İfadelerinin Matematiksel Açıklamalarına İlişkin Bulgular

Bu bölümde öğretmen adaylarının ve matematik bölümü öğrencilerinin sırasıyla $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{0}$, $3.\infty$, $\frac{3}{\infty}$ ifadelerine ilişkin açıklamaları sunulmuştur.

Çizelge 4 incelendiğinde ∞/0'a ilişkin olarak öğrencilerin ifadelerinden tanımsız, belirsiz ve sonsuz kategorileri oluşturulmuştur. Tanımsız kategorisine ilişkin olarak ise tanımsız değer, parça-bütün ilişkisi ve bölme tanımı kodları oluşturulmuştur. Belirsiz kategorisine ilişkin olarak belirsiz değer ve bölme tanımı kodları oluşturulmuştur. Sonsuz kategorisine ilişkin olarak tek kod olan parça-bütün ilişkisi oluşturulmuştur. Bununla birlikte ifadenin tanımsız, sonsuz ya da belirsiz olduğunu belirtirken açıklama yapmayan öğrenciler de (n=37) azımsanmayacak kadar fazladır. Analiz sonucunda ∞/0 ifadesini açıklarken öğrenciler genel olarak a/a gibi ifadelerde bir sayının içinde başka bir sayıyı arama eğilimi göstermişler. Bu nedenle bu tür ifadeler yapılan açıklamaya göre ya parça-bütün ya da bölme tanımı kodu olarak ifade edilmiştir. Bazı öğrenciler sıfıra ilişkin olarak hiçlik, sonsuzluğa ilişkin olarak ise çokluk kavramını kullanmışlar. Ö16 kodlu öğrenci "∞/0'ı çokluğun içinde hiçlik olduğunu fakat ne kadar olduğunun bilinmediğinden dolayı belirsizlik" olarak ifade etmiştir.

37 öğrenci vermiş oldukları cevapları açıklamamışlardır. Bunların çoğunun matematik bölümü öğrencisi oldukları görülmektedir. ∞/0 belirsizliğini bir sayıya eşitleyerek sonuca ulaşılamayacağını belirten öğrenciler da çoğunluktadır. Açıklamalar incelendiğinde öğrencilerin içler dışlar çarpımı yaparak ortaya çıkan eşitliğin sağlanamamasından dolayı belirsiz veya tanımsız kavramlarını kullandıkları görülmüştür. Bu açıklamayı yapanların çoğu öğretmen adaylarıdır. İfadenin sonsuz olduğunu belirten öğrencilerin cevapları incelendiğinde çoğunun açıklama yapmadığı görülmüştür. Bir öğrencinin ise bölme işlemiyle açıklama yapmaya çalıştığı görülmüştür (Bkz. Resim 4). Resim 4'te yer alan açıklama incelendiğinde sonsuzu sayı olarak düşünen öğrenciler, sonsuzun içinde kaç tane sıfır olduğu aramışlardır. Buradan sonsuzun içinde sonsuz tane sıfır olduğu düşünmüşlerdir.

Bir öğrencinin ∞/0 belirsizliğini açıklarken $\infty.\infty$ belirsizliğine benzeterek açıklamasını yaptığı görülmüştür. Öğrencinin bu ifadeyi limit işlemlerinde belirsizliklerin birbirine dönüştürülmesiyle açıklamaya çalıştığı söylenebilir. Nitekim öğrenci $\frac{\infty}{0} = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}} = \infty.\infty$ dönüşümü yaparak açıklamasını yapmıştır.

Öğrencilerin benzer açıklamaları yapmalarına rağmen ∞/0 ifadesine belirsiz ya da tanımsız dedikleri görülmüştür. Bu bağlamda belirsizlik ve tanımsızlığın birbirine karıştırıldığını veya benzer anlamlarda kullanıldığını söylenebilir. Ayrıca öğrencilerin cevaplarından sonsuzluğu belirsizlik olarak algıladıkları ve bu nedenle sonsuz ile yapılan işlemlerin de belirsiz olacağını düşündükleri görülmüştür. Sonuç olarak ∞/0 ifadesi ile ilgili bulgulardan öğrencilerde sonsuzluğu sayı olarak düşünmek, parça-bütün ilişkisini sonsuz ve sıfır ile yapılan işlemlere genelleme, sıfırın hiçlik sonsuzun ise çokluk olarak düşünülmesini epistemolojik engel olarak ifade edilebilir.

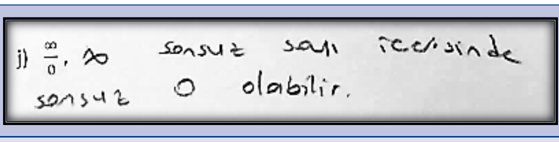
Çizelge 4'ten görüldüğü üzere ∞/0 ifadesine tanımsız diyen öğrencilerin büyük çoğunluğu değerin sıfır olmasını gerekçe göstermişlerdir. Örneğin; Ö1 kodlu öğrenci sıfırın bölen olamayacağı için tanımsız olduğunu belirtmiştir (Resim 5).

Çizelge 5'ten görüldüğü üzere $0/0$ ifadesine ilişkin olarak belirsiz ve tanımsız kategorileri oluşturulmuştur. Öğrencilerin çoğu $0/0$'ın belirsizlik olduğunu ifade etmişlerdir. Sadece 4 öğrenci $0/0$'un tanımsız olduğunu belirtmiş ve bu öğrencilerden biri açıklama yapmamıştır. Bu öğrenciler 0'ı hiçlik/olmayan olarak ifade etmişlerdir. 0'ın hiçliğe/olmayan bir şeye bölümünün tanımsız olacağını belirtmişlerdir. Belirsizlik kategorisi altından toplanan cevaplara ilişkin belirsiz değer, parça-bütün, bölme tanımı, belirsizliğin kaldırılması ve 0'ın yutan eleman olması kodları oluşturulmuştur.

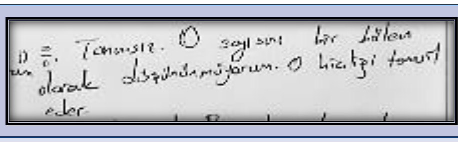
Çizelge 5'e göre 0/0'a ilişkin açıklamalar incelendiğinde 24 öğrencinin belirsiz değer olarak ifade ettiği görülebilir. Öğrenciler genellikle ifadeyi bir x değerine eşitleyip, eşitlenen değerin sonsuz değer alabileceğinden 0/0'ın belirsiz olduğunu ifade etmişlerdir. Ö5 kodlu öğrenci işlem yapmaksızın sözel olarak bu açıklamayı yapmıştır (Resim 6). Diğer öğrenciler ise açıklamalarını "belli bir sonuca ulaşamadığından, birden fazla değer aldığından, kesin bir sonuç söylenemediğinden, belli bir değeri olmadığından" şeklinde ifade etmişlerdir. Ö4 kodlu öğrenci ise sıfırın sıfıra bölümünün sıfır olduğuna ilişkin açıklama yapmıştır (Resim 6). Araştırmacılar tarafından "sürekli sıfır diye devam ettiği için sonucu olmaması", ilgisiz açıklama olarak değerlendirilmiştir.

Bölme tanımı kodu altında toplanan açıklamalardan öğrencilerin ifadenin belirsiz olduğuna dair açıklamayı bölme ile açıklamaya çalıştıklarını göstermektedir. Açıklamalar incelendiğinde bazı öğrencilerin sıfır için "hiç, yeterince küçük, belli değeri olmayan, olmayan bir şey" ifadelerini kullandıkları görülmüştür (Resim 7).

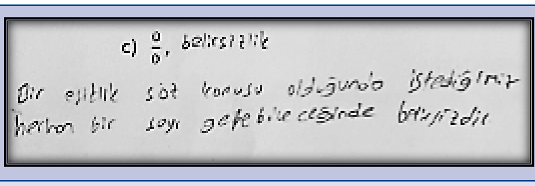
Bölme tanımı kodu altındaki açıklamalar incelendiğinde iki öğrenci dışındakilerin pay ve paydanın her ikisinin de sıfır olmasından dolayı ifadenin belirsiz olduğunu belirtmişlerdir. Aynı öğrenciler 2/0 ifadesi için "payda sıfır olunca tanımsız olur" açıklamasını yapmış oldukları görülmüştür.

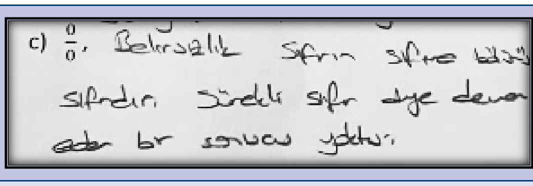


Resim 4. Ö19 kodlu öğrenciye ait açıklama

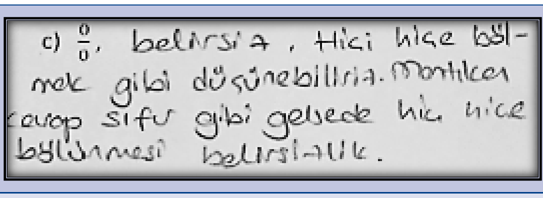


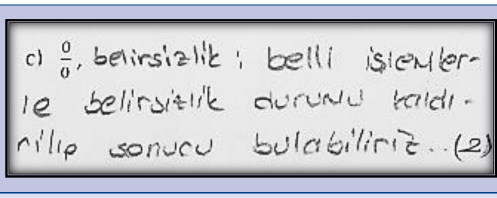
Resim 5. Ö1 kodlu öğrenciye ait açıklama





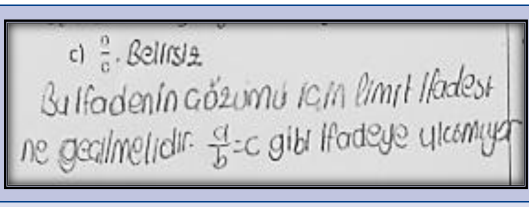
Resim 6. Ö5'e ve Ö4'e ilişkin açıklama

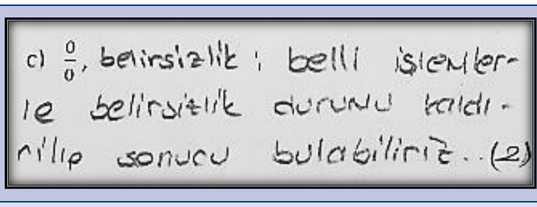




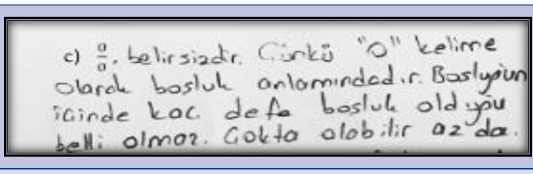
Resim 7. Ö25'e ait açıklama

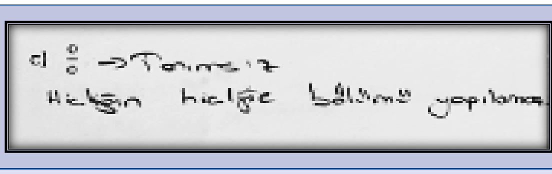
Resim 8. Ö65'in cevap kâğıdı



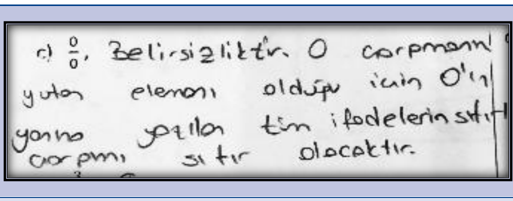


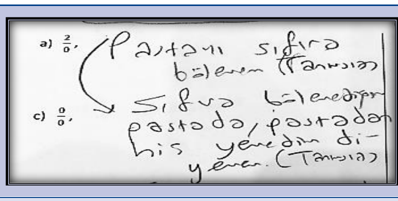
Resim 9. Ö33 ve Ö26'ya ait açıklama





Resim 10. Ö16 ve Ö39'a ait açıklama





Resim 11. Ö57'nin cevap kâğıdı

Resim 12. Ö55'e ait cevap kâğıdı

Dolayısıyla bu öğrencilerin 0/0 ifadesinin belirsizlik olduğunu bildikleri fakat buna ilişkin açıklama yapamadıkları söylenebilir. Bu öğrencilerin 0/0 ifadesinin neden belirsiz olduğu hakkında bir fikirlerinin olmadıkları ifade edilebilir. Zira Ö65'in açıklaması bu durumu doğrular niteliktedir. Buradan ifadenin belirsiz olduğunu açıklama yapmadan ifade eden öğrencilerin bu bilgiyi ezbere edindikleri söylenebilir.

Belirsizliğin kaldırılması kodu altındaki açıklamalar incelendiğinde öğrenciler işlem yapılarak belirsizliğin kaldırılmasına değinmişlerdir. Öğrencilerin bazıları yapılacak işlemin ne olduğunu belirtmiş, bazıları bu işlemi belirtmemiştir. Bazı öğrenciler L'Hospital kuralıyla belirsizliğin giderilmesine değinirken, bazı öğrenciler ekstra işlem, belli işlem, limite geçerek belirsizliğin kaldırılmasından bahsetmiştir (Resim 9).

Parça-bütün kodu altındaki açıklamalar incelendiğinde öğrencilerin sıfıra ilişkin olarak "yokluk, boşluk, hiçlik" ifadelerini kullandıkları dikkat çekmektedir (Resim 10). 0/0' a ilişkin bu bulgularda sıfıra ilişkin kullanılan hiçlik, yokluk ve boşluk ifadelerinin sıfıra ilişkin epistemolojik engelin var olduğunun bir göstergesi olabilir. Nitekim tarihsel gelişim sürecinde sıfıra ilişkin bu algılar sıfırın kullanımı ve sıfır ile işlemlerde zorluklar yaşanmasına neden olmuştur.

Yutan eleman kodu altındaki cevap incelendiğinde (Resim 11) 0/0'ın belirsiz olduğunu, bu durumun gerekçesi olarak da "0 yutan eleman olduğundan her sayının 0'la çarpımının 0 olacağını" şeklinde ifade etmiştir. Öğrencinin verilen ifadeyi hem belirsizlik hem de 0 olarak ifade etmesi, bu kavramları net bir Resimde yorumlayamadığı şeklinde açıklanabilir.

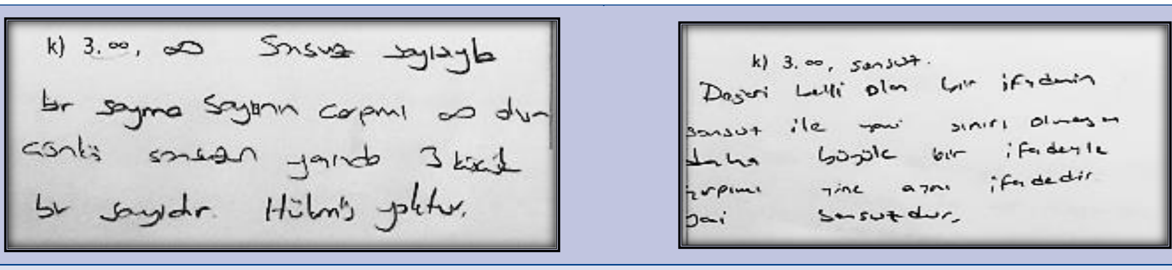
Tanımsız kategorisinin bölme tanımı kodu altında değerlendirilen bir öğrenci (Resim 12) yaptığı tüm açıklamalarda pasta metaforunu kullanmıştır. Bu öğrenci 0/0 ifadesinin tanımsız olduğunu "sıfıra bölemediğim pastada, pastadan hiç yemedim diyemem" şeklinde ifade etmiştir. Aynı öğrenci *sayı*/0 ifadesinin tanımsız olduğunu ise "pastayı 0'a bölemem" şeklinde ifade etmiştir. Bu öğrencinin sonsuzluğu, tanımsızlığı ve belirsizliği tanımlarken pasta metaforu ile açıklama yaptığı ve pastayı bölme eylemi ile zihninde ilişkilendirdiği söylenebilir.

Çizelge 5. 0/0'a ilişkin kategori ve kodlar

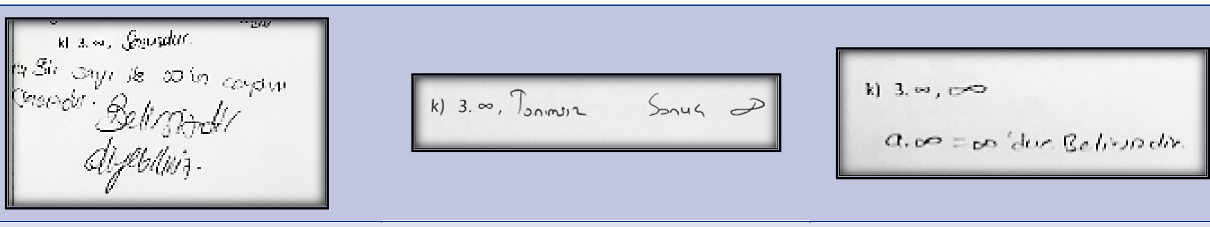
	Kategori	Kod	f	Örnek açıklamalar	
0/0	Belirsiz	Belirsiz değer Bölme tanımı Belirsizliğin kaldırılması Parça-bütün 0'ın yutan eleman olması	24 19 11 3 1	$\frac{0}{0}$. $\frac{0}{0}=x$ $0=0x$ x'in sonsuz değeri vardır. belirsizdir.	(Ö3)
				c) $\frac{0}{0}$, payı sıfır olursa sonuç sıfırdır fakat payda sıfır olursa tanımsızdır. İkisi aynı anda olduğundan belirsizlik vardır.	(F3)
				c) $\frac{0}{0}$. balık yakalayan kelimesine yakalanacak belirsizlik kalkti'n	(Ö8)
				c) $\frac{0}{0}$, belirsizlik Sıfırın sıfıra bölümü bir sonuç vermediği için	(Ö31)
				c) $\frac{0}{0}$. Belirsizliktir çünkü bu durumu limitte uyguladığımızda belli bir sonuç çıkar.	(Ö61)
				c) $\frac{0}{0}$. [illegible]	(F20)
				c) $\frac{0}{0}$. Belirsiz Belirsizliği giderilebilir. L' hospital kuralıyla.	(Ö10)
				c) $\frac{0}{0}$. Belirsizliktir. 0 çarpmanın yutan elemanı olduğu için 0'ın yanına yazılan tüm ifadelerin sıfır ile çarpımı sıfır olacaktır.	(Ö57)
	Tanımsız	Bölme tanım	3	c) $\frac{0}{0}$ → Tanımsız Hiçliğin hiçliğe bölümü yapılamaz.	(Ö39)

Çizelge 6. 3. ∞’a ilişkin kategori ve kodlar

	Kategori	Kod	f	Örnek açıklamalar	
3. ∞	Belirsiz	Sonsuzun tanımsız/belirsiz olması	5	k) 3. ∞, Belirsiz Sonsuz tanımsız olduğu için.	(Ö70)
				k) 3. ∞, Sonsuzu bir sayı ile çarpınca yine sonsuzda sonsuz olma durumu belirsizindir	(Ö71)
		Dönüşüm uygulama	1	k) 3. ∞, Belirsiz L'Hospital kuralından	(F18)
	Tanımsız	Tanımsız değer	11	k) 3. ∞, Tanımsız Sonsuza yaklaşır, ama tam olarak değerini bulamayız.	(Ö62)
				k) 3. ∞, Tanımsızlık 3. ∞ = ∞, ∞ ile herhangi bir sayının çarpımı da sonsuzdur. Bu bir kabuldür ispatlanamadığı için tanımsızlıktır	(Ö51)
		Sonsuzla çarpma	2	k) 3. ∞. Tanımsız ∞ ifadesi zaten sonsuz çokluk anlamındadır. Bu ifadeyi belirli bir sayı ile çarpmak zaten bu ifadeyi tanımsız yapar.	(Ö33)
		Sonsuza göre sayının çok küçük olması	2	k) 3. ∞, Tanımsız Sayıyla sonsuzun çarpımını açıklayamayız. Sayı sonsuzun içinde kaybolup gider.	(Ö10)
		Sonsuzun reel sayı olmaması	2	$\frac{x}{3} = \infty$. Bir sayının reel bir sayıya bölümünden yine reel bir sayı çıkar fakat ∞'luk bir sayı değildir. Dolayısıyla tanımsızdır.	(Ö6)
	Sonsuz			k) 3. ∞, Sonsuzdur. Hangi sayıyla ∞'u çarparsak cevap ∞'dur.	(Ö60)
		Yutan eleman olarak sonsuz	1	k) 3. ∞, = ∞ sayı × ∞ = ∞ (0 gibi özel durumlar hariç)	(Ö67)
		Potansiyel sonsuzluk	29	k) 3. ∞, = ∞ Pozitif tam sayıları ∞ ile çarparsak sonuç yine sonsuza gider.	(Ö45)
		Sonsuzluğun toplamsal ifadesi	2	k) 3. ∞, 3. ∞ = x x = ∞ + ∞ + ∞ = ∞ (Sonsuzdan büyük sayı yoktur)	(Ö55)



Resim 13. Ö4 ve Ö37y’e ait açıklama



Resim 14. Ö17, Ö21 ve Ö30’a ait açıklamalar

Çizelge 6 incelendiğinde $3.\infty$’a ilişkin öğrenci cevaplarının belirsiz, tanımsız ve sonsuz kategorileri altında toplandığı görülmektedir. Tablo 6’ta görüldüğü gibi belirsiz kategorisine ait sonsuzun tanımsız/belirsiz olması ve dönüşüm uygulama kodları oluşturulmuştur. Tanımsızlık kategorisinde tanımsız değer, sonsuzla çarpma, sonsuza göre sayının çok küçük olması, sonsuzun reel sayı olmaması kodları oluşturulmuştur. Sonsuzluk kategorisinde ise yutan eleman olarak sonsuz, potansiyel sonsuzluk ve sonsuzluğun toplamsal ifadesi kodları oluşturulmuştur.

Belirsizlik kategorisi altında değerlendirilen açıklamalara göre öğrenciler sonsuzu belirsiz ya da tanımsız olarak algıladıklarından ifadenin belirsiz olacağını düşündükleri görülmüştür. Ayrıca L’Hospital kuralından belirsiz olduğunu ifade etmişlerdir.

Tanımsızlık kategorisinin altında değerlendirilen bir öğrenci gerekçesini açıklamamıştır. Ancak ifadeyi "$\infty.\infty.\infty$" şeklinde yazmıştır. Burada sonsuz ile bir sayının çarpıldığına dikkat etmeyen öğrenci, 3 tane sonsuzun kendisiyle çarpımını tanımlayamadığı için, verilen ifadeyi tanımsız olarak belirtmiş olabilir.

Öğrencilerden ikisi sonsuzun değeri bilinmediğinden verilen ifadenin tanımsız olduğunu ifade etmişlerdir. Bu durum öğrencilerin verilen cebirsel ifadenin ($3.\infty$) sonucunun mutlaka bir sayıya eşitlenmesi yanılgısı içinde olduğu şeklinde yorumlanabilir. Burada da Ö57’nin cevabında görüldüğü gibi sonsuzluk sembolünü, değeri tam olarak bilinmesi gereken sayı gibi düşünmeleri ve $3.\infty$ ifadesinin de sayısal bir değere eşit olmadığından tanımsız olarak ifade etmeleri, bu durumun göstergesi olabilir.

Tanımsız kategorisinin sonsuza göre sayının çok küçük olması kodu altında değerlendirilen açıklamaya göre öğrencilerin $3 . \infty$ ifadesinde 3 sayısı ile ∞’u karşılaştırma yoluna gittikleri, 3 sayısının sonsuzun yanında küçük olduğu için ifadenin sonucuna etki etmeyeceğini düşündükleri görülmektedir (Resim 13). $3.\infty$ ifadesine benzer ifadelerin açıklamalarında bu açıklamaya benzer açıklamalar öğrencilere yapılmaktadır.

Sonsuz kategorisinde dikkat çeken hususlardan biri öğrencilerin bazılarının ifadenin sonsuz olduğunu belirtmekle beraber ifadeye belirsiz demeleridir. Bu durum öğrencilerin ifadeyi bir işlem gibi düşündüklerinde sonsuza eşitledikleri ancak sonsuzla yapılan bir işlem olması sebebiyle ifadeyi belirsiz veya tanımsız olarak düşündükleri olarak yorumlanabilir (Resim 14).

Nitekim belirsiz ve tanımsız kodlarındaki açıklamalar incelendiğinde sonsuzun belirsizliği ve tanımsızlığına dair açıklama yapmış oldukları görülmektedir.

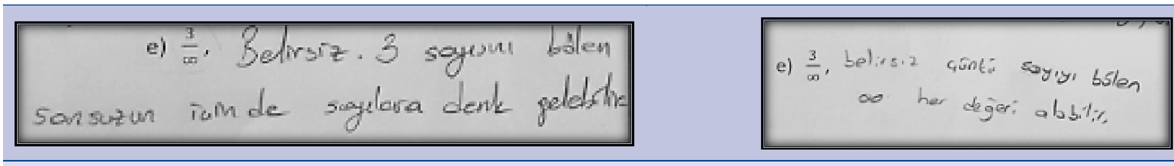
$3/\infty$ ifadesine ilişkin öğrenci cevapları için belirsiz, tanımsız ve sıfır kategorileri oluşturulmuştur. 32 öğrenci açıklama yapmamıştır.

Verilen ifadenin değerinin belirsiz olduğunu ifade eden bir öğrenci, 3 sayısı ile sonsuzu kıyaslayarak, 3’ün sonsuzda çok az yer kapladığından ifadenin belirsiz olduğunu belirtmiştir. Bazı matematikçiler matematiğin sonlu adımda doğal sayılar üzerine inşa edilebileceğini, aksi halde yani sonlu adımda inşa edilemeyen önermelerin doğruluk değerlerinin belirsiz olduğunu ifade etmişlerdir. Burada da 3 ve sonsuzu kıyaslayan öğrenci, ifadenin belirsiz olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla doğruluk değeri olarak belirsiz şeklinde kodlanmıştır. Cevabını belirsiz olarak ifade eden bir diğer öğrenci ise açıklamasını parça-bütün ilişkisi içinde yapmıştır. Burada öğrencinin sonsuzu sayı olarak düşünmesi ilgi çekicidir.

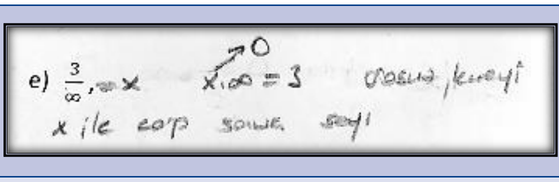
Belirsiz kategorisi bölme kodu altındaki açıklamalara göre öğrencilerin ifadesini 3| ile karıştırdığı görülmüştür (Şekil 15). Nitekim açıklamalar incelendiğinde sonsuzun içinde 3 sayısını bölen sayılara denk gelinebileceğinden sonuç belirsiz olarak ifade etmiştir. Yani öğrenci sonsuz sayı içerisinden örneğin 3 sayısına denk gelinirse sonucun 1, 1 sayısına denk gelinirse sonucun 3 olacağını, bu nedenle ifadenin belirsiz olduğunu düşünmektedir. Bu durum öğrencideki ciddi bir yanılgının göstergesidir.

Tablo 7. 3/∞'a ilişkin kategori ve kodlar

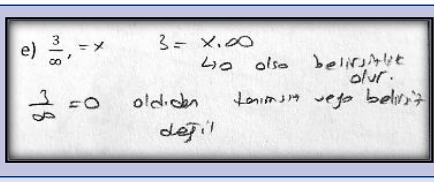
	Kategori	Kod	f	Örnek açıklamalar	
		Belirsiz değer	2	e) $\frac{3}{\infty}$. Belirsiz. 3 sayısı sonsuzda çok az yer kaplar. Ancak sonuç belirsizdir.	(Ö70)
	Belirsiz	Parça-bütün ilişkisi	3	e) $\frac{3}{\infty}$, Sonsuzun ne olduğunu bilmediğim için pastası sonsuza bölemem. (Belirsiz)	(Ö55)
		Bölme tanımı	2	e) $\frac{3}{\infty}$. Belirsiz. 3 sayısını bölen sonsuzun tüm de sayılara denk gelebilir	(Ö1)
				e) $\frac{3}{\infty}$, Tanımsız Sonlu bir sayının içinde sonsuz bir sayıyı tanımlayamayız.	(Ö57)
		Parça-bütün ilişkisi	5	e) $\frac{3}{\infty}$, $\boxed{\text{Tanımsız}}$ $\frac{3}{\infty} = k$ dersek $3 = \infty . c$, ama c tanımsızdır değeri yoktur.	(Ö56)
		Tanımsız değer	14	e) $\frac{3}{\infty}$, Tanımsızlık $\frac{3}{8} = 0$ olarak kabul edildiğinin sebebi açıklanamamıştır bu yüzden tanımsızlıktır.	(Ö51)
3/∞	Tanımsız	Bölme tanımı	3	e) $\frac{3}{\infty}$, Tanımsız, Birşeyi ∞'a bölünce sonuç "0"a yaklaşır, ancak tam olarak değeri bulunamaz	(Ö62)
		Sonsuzun bilinmemesi	1	e) $\frac{3}{\infty}$. Tanımsız Sayının sonsuza bölünmesi açıklanamaz.	(Ö10)
				e) $\frac{3}{\infty}$, Tanımsız! Sonsuzun ne olduğunu bilmediğimiz için tanımsız	(Ö13)
				e) $\frac{3}{\infty}$, 0 3 sayısının ∞'a bölümü limit kavramından 0'a yaklaşan değerler alır.	(Ö43)
		Limit değeri ile işlem yapma	13	e) $\frac{3}{\infty}$. 0 dır. 3 sınırı olan bir sayıdır ancak sonsuz sınırsızdır o yüzden sonuç sıfırdır.	(Ö45)
	Sıfır	Parça bütün ilişkisi	6	e) $\frac{3}{\infty}$, 0 [illegible] bölümünden 0 [illegible] bir sayı çıkar.	(Ö14)
		Bölme	6	e) $\frac{3}{\infty}$, = 0 Reel sayının sonsuza bölümü sıfır olduğu için	(Ö31)



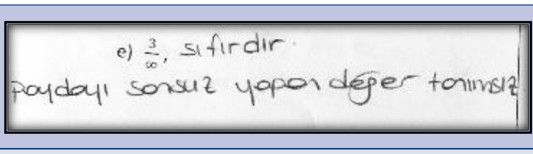
Şekil 15. Ö1 ve Ö2'ye ait açıklama



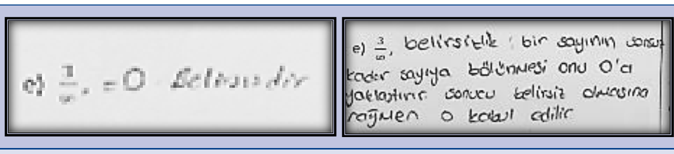
Şekil 16. F1'e ait cevap kâğıdı



Şekil 17. Ö66'ya ait cevap kâğıdı



Şekil 18. F18' ait cevap kâğıdı



Şekil 19. Ö30 ve Ö26'ya ait açıklama

$3/\infty$ ifadesinin tanımsız olduğunu belirten öğrenci ifadeleri parça-bütün ilişkisi, tanımsız değer, bölme tanımı ve sonsuzun bilinmemesi kodları altında birleştirilmiştir. Parça-bütün ilişkisi olarak kodlanan öğrenciler, sonlu bir sayıda sonsuz bir sayıyı aramanın tanımsız olacağını ifade etmişlerdir. İfadeleri tanımsız değer olarak kodlanan öğrencilerin (örneğin Ö56) büyük kısmının ifadeyi bir x sayısına eşitledikleri görülmüştür. Öğrenciler sonrasında içler dışlar çarpımı yapmışlardır ve sonsuz ile çarpıldığında 3 sayısını veren x sayının tanımlı olmadığını, bu yüzden ifadenin tanımsız olduğunu belirtmişlerdir. Bu durum Karakuş'un (2007) çalışmasında çarpmaya göre tersi yaklaşımıyla açıklamaya örnektir ve soyut öğretimsel açıklama olarak ifade edilmektedir. Bu yaklaşımla yapılan açıklamalar en her sınıf seviyesindeki öğretmen adaylarında görülmüştür (Karakuş, 2007). Bu çalışmada da öğretmen adayları ve matematik bölümü öğrencilerinin bu yaklaşımla açıklama yaptıkları görülmüştür.

Ö51 ise ifadenin sıfır olmasının sebebini açıklanmaksızın doğru kabul edildiğinden ifadenin tanımsız olduğunu savunmuştur. İspat gerektirmeyen ancak doğruluğu kabul edilen ifadeler aksiyom olarak adlandırılmaktadır (Gerstein, 2012). Burada da öğrencinin $\frac{3}{\infty} = 0$ ifadesini aksiyom olarak kabul ettiği söylenebilir. Ayrıca $\frac{3}{\infty}$ ifadesinin sıfıra eşit olduğunu yazdıktan sonra bu ifadenin tanımsız olduğunu ifade eden öğrencilerin, tanımsız kavramı hakkında yanılgıya sahip oldukları söylenebilir.

İfadenin 0'a eşit olduğunu söyleyen öğrencilerin cevapları için limit değeri ile işlem yapma ve parça-bütün ilişkisi ve bölme kodları oluşturulurken, öğrencilerin çoğunun açıklama yapmadığı görülmektedir. Öğrencilerin $\frac{sayı}{\infty}$ ifadesini limit durumunda düşünerek işlem yapmaya eğilimli oldukları söylenebilir. İfadeleri tanımsız değer olarak kodlanan öğrenci cevaplarında da bu eğilim görülmektedir.

$3/\infty$ ifadesine ilişkin iki öğrenci cevap vermemiştir. İki öğrencinin ise aynı şekilde ilişkisiz açıklama yaptıkları görülmektedir. Verilen ifadeyi bilinmeyen sayıya eşitleyen öğrenciler, içler dışlar çarpımı yaparak sonsuz ile çarpıldığında 3'ü veren bilinmeyeni 0 olarak kağıtlarına yazmışlardır.

Öğrencilerin zihinlerinin tanımsızlık, belirsizlik, sonsuzluk konusunda oldukça karışık olduğu söylenebilir. Örneğin Ö66'ya ait cevap kağıdında görüldüğü gibi (Şekil 17), öğrenci pek çok arkadaşı gibi ifadeyi bir bilinmeyene eşitleyip işlemlerini sürdürerek bilinmeyeni bulma eğilimindedir. Yaptığı işlemler sonucunda bilinmeyen değeri 0 olarak bulup belirsizlik olduğunu ifade etmiş, sonrasında ise $\frac{3}{\infty} = 0$ eşitliğini yazarak, sonucun tanımsız ya da belirsiz olmadığını ifade etmiştir.

Benzer şekilde F18, $3/\infty$ ifadesinin 0'a eşit olduğunu söylemiştir. Açıklamasında ise "paydayı sonsuz yapan değerin tanımsız" olduğunu ifade etmiştir. Yine bu öğrencinin sonsuzluk ve tanımsızlık konuları hakkında oldukça karışık olduğu söylenebilir.

Sıfır kategorisinde açıklama yok kodu altında ve bölme kodu altında yer alan açıklamalar incelendiğinde $3/\infty$ işlem olarak düşünüldüğünde sonuç sıfıra eşitlenirken ifade için belirsiz denilmiştir (Şekil). Benzer durum sonsuzla yapılan $3.\infty$ ifadesinde de görülmüştür. Bu durum öğrencilerin ifadeyi bir işlem gibi düşündüklerinde sıfıra eşitledikleri ancak sonsuzla yapılan bir işlem olması sebebiyle ifadeyi belirsiz olarak düşündükleri olarak yorumlanabilir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Sonsuzluk kavramının günlük hayattan edinilen gözlem sonuçları ile oluşturulduğu söylenebilir. Sonlu deneyimler üzerine düşünülerek oluşturulan sonsuzluk kavramı, bunların sonsuza uzandığını hayal ederek ortaya çıkmaktadır (Tirosh, 2001). Fischbein (2001) sonsuzluk kavramının oluşumunda sezgilerin rolü olduğunu belirtmiştir. Buna göre sonsuzluk kavramına ilişkin algılarımız informal yollarla kazandığımız birincil sezgiler ve eğitim yoluyla kazandığımız ikincil sezgiler yoluyla sonsuzluk algımızı oluşturmaktayız. Öğrencilerin sonsuzlukla ilgili açıklamaları değerlendirildiğinde anlayışlarının birincil sonsuzluk algısına (Fischbein, 2001) uygun olarak oluştuğu ve devam ettiği söylenebilir. Buna göre sonsuzlukla ilgili anlayışlarının daha çok yaşam deneyimlerinden şekillendiği görülmektedir. Zira verdikleri cevaplar çoğunlukla "sonu olmayan, ucu bucağı olmayan, sürekli devam eden" şeklinde sonsuzluğun sezgisel olarak oluşmaya başladığı anlamında kullanmışlardır. Bu açıklamalar birincil sezgisel algı bağlamında değerlendirilebilir. Öğrencilerin günlük hayat deneyimleri yoluyla edindikleri birincil sezgilerinin lisans eğitimi almalarına rağmen sonsuzluk algılarını çok fazla değiştirmediği görülmektedir. Bu durum öğrencilerin sonsuzluğu devam eden ve artan bir süreç olarak görmeleri şeklinde de yorumlanabilir. Eklemenin bitmeyen bir süreç olduğu bilgisine sahip olan öğrenciler, sonsuzluk kavramını ekleme ile ilişkilendirmişlerdir. Böylece bir kümeye sonsuz eleman eklenmesi ile sonsuz küme elde edebileceklerini düşünmüşlerdir. Sonsuzluğun tarihsel gelişimi içinde potansiyel ve aktüel sonsuzluk tartışmaları göz önüne alındığında, bu durumun epistemolojik bir engel teşkil ettiği söylenebilir. Herscovics (1989) tarafından ortaya konan epistemolojik engellerden bazıları aldatıcı sezgisel deneyimlere güvenme eğilimi, genelleme eğilimi, doğal dilin neden olduğu engeller olarak belirtilmiştir (Moru, 2006). Bu çalışmanın da öğrencilerin benzer engellere sahip oldukları görülmektedir.

Öğrencilerin bir kısmı sonsuzluğu kümelerle ilişkilendirerek Cantor'un ele aldığı gibi bir sonsuzluk anlayışından bahsetmişlerdir. Buna göre öğrenciler kümeleri eleman sayılarına göre sayılabilir ve sayılamayan sonsuz küme olarak değerlendirmişlerdir. Öğrencilerin bu anlayışı aktüel sonsuzluk bağlamında incelenmiştir. Sonsuzluğu sayı kümeleri ile ilişkilendiren bazı öğrenciler ise sayı kümelerinin eleman sayılarının sürekli artan yönüne vurgu yaparak potansiyel sonsuzluk bağlamında değerlendirmişlerdir. Bazı öğrenciler ise sonsuzluğun mantıksal olarak doğru ancak gerçek hayatta o şekilde karşılaşmayacağımız örnekler üzerinden açıklamışlardır. Bu öğrencilerin cevapları da aktüel sonsuzluk bağlamında incelenmiştir. Aristo insan beyninin potansiyel sonsuzluğu kavrayabileceğini, tamamlanmış bir süreç olan sonsuzluğun bütün halini yani aktüel boyutunu kavrayabileceğini ise reddetmiştir (Dubinsky, Weller, McDonald ve Brown, 2005). Öğrenci cevapları incelendiğinde eşit sayıda öğrencinin sonsuzluğun potansiyel ve aktüel yönüne değindikleri görülebilir. Öğrenciler sonsuzluğa dair eylemsel, sezgisel, potansiyel ve aktüel sonsuzluklardan bahsetmişlerdir. Eylemsel sonsuzluk düşüncesine sahip öğrenciler sonsuzluğun devam eden ve bitmeyen yönüne vurgu yapmışlardır.

Cevabı hem aktüel sonsuzluk hem duygusal sonsuzluk boyutlarında değerlendirilen bir öğretmen adayı, harmonik serinin matematiksel açıklamasını yaparak bu açıklamayı günlük hayata da uyarlamıştır. Buna göre öğrenci sloganını "…küçük adımlar, büyük adımları doğurur." şeklinde açıklamıştır. Manevi boyut, sonsuzluk tartışmaları içinde bireyler tarafından kendiliğinden ifade edilir. Bu, birincil sonsuzluk algısının öncelikli bir bileşeni olarak görülebilir. Bu manevi boyut, dini duygular olarak ifade edilebilir (Singer ve Voica, 2008). Bu çalışmada da bu öğrencinin sonsuzluğun gündelik hayatına uygulamasını ve dini yönüne vurgu yaptığını görülmektedir.

Öğrencilere sorulan $\frac{3}{\infty}$ ifadesine verdikleri 0 cevabını genelledikleri ve genelleme eğilimde olduklarından epistemolojik engele sahip oldukları görülebilir. Benzer şekilde sayılarla yapılan bölme işlemini de sonsuza genellemişlerdir.

Matematik öğretiminde konuşulan dilin, etkili iletişimin sağlanması açısından önemi vardır (Harel, 2007). Etkileşimin sağlanması için matematiksel kavramların biliniyor olması gerekmektedir. Öğrencilerin sonsuzluk, tanımsızlık, belirsizlik kavramlarına ilişkin algılarında kullandıkları dilin etkisinin olduğu gözlemlenmiştir. Bütün kavramları birbirinin yerine kullandıkları, örneğin tanımsızlığı açıklarken belirsizliği kullandıkları, sonsuzluğun sürekli devam sınırsız bir durum olduğunu düşünmeleri dile bağlı epistemolojik engele sahip olduklarının göstergesi olabilir. Ayrıca sıfır ile yapılan işlemlerde "olmayan şeyi olmayan şeye bölmeye" ilişkin söylemi epistemolojik engel olarak değerlendirilebilir. Sıfır ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde öğretmenlerin sıfıra ilişkin algılarının $\frac{0}{0}$ 'a ilişkin doğru açıklama yapmalarına engel olduğunu belirtmektedir (Young-Ok, 2007). Benzer şekilde Bütün ve Erdoğan çalışmalarında matematik öğretmenlerinin sıfıra ilişkin anlayışlarının "olmayan şey", "hiçlik" şeklinde olduğunu, bu anlayışın da sıfıra bölme konusunu somutlaştırmada yanlış anlayışlar oluşturabileceğini belirtmişlerdir. Buna göre matematik öğretmenleri sıfıra bölme ile ilgili olarak yaptıkları açıklamalarında tanımsız ve belirsiz kavramlarını kullanmakta ve bu kavramları da eş anlamlı olarak kullanmaktadırlar. Matematik dünyasında anlamlı ve mümkün olan işlemler, matematikle uğraşmayan insanlar için çok da anlamlı olmayabilir (Monaghan, 2002). Sonlu olan dünyada sonsuzluğu anlamaya ve anlatmaya çalışmak, tarihte matematikçileri yorduğu gibi öğrencileri de yormaktadır. Sonsuzluğu anlatmak için sunulan bağlamlar, öğrenci için çok da anlaşılır olmayabilir. Sonsuzluğun bu metafiziksel yapısı da (Theodoridis, 2017) öğrenciler için epistemolojik engel oluşturmaktadır. Bazı kavramların oluşturulma sürecinde matematik diline hâkim olmamak ve matematiksel olarak geçerli halini öğrenmemek, sonraki yıllarda epistemolojik engel olarak karşımıza çıkabilir.

Doğaları gereği karmaşık olan sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarını öğrenirken öğrencilerin yaşadıkları zorluklar ve kavram yanılgıları, epistemolojik engeller olarak karşımıza çıkmaktadır. İlgili kavramların tarihsel gelişimi incelendiğinde öğrencilerin yaşadıkları zorluklara benzer zorlukların, matematikçiler tarafından yaşandığı da görülmektedir. Matematikte bir şeyin yokluğunu temsil eden sıfır sayısı, MS 7. yy'da Hintli matematikçiler tarafından matematiğe kazandırılmıştır. Bu tarihlerde pozitif ve negatif sayıların yanı sıra sıfırla bölme işlemleri yapan Brahmagupta, sıfırın sıfıra bölümünün yine sıfır olacağını söylemiştir (Kılınç, 2018). Hint inanışının yapılan matematik çalışmalarını etkilediği söylenebilir. Sıfır, inanışa göre yokluk ve boşluğu temsil etmektedir. O zamana kadar görülmemiş büyük sayıların çalışılması ile sonsuz büyük sayılar gündeme gelmiş ve dolayısıyla sonsuzluk kavramının ilk defa matematiksel olarak çalışıldığı söylenebilir. Brahmagupta çok büyük sayıları sıfıra bölmüş ve sonucu matematiksel sonsuz olarak ifade etmiştir (Pogliani, Randic ve Trinajstić, 2006). Görüldüğü gibi matematik tarihinde de sıfır ile bölme işlemi matematikçileri meşgul etmiş, tartışmalara neden olmuştur. Dolayısıyla sıfırla bölme işleminin de epistemolojik bir engel olduğu söylenebilir. Benzer sonuç Kanbolat'ın (2010) çalışması ile de desteklenmektedir. O halde sonsuzluğu sayı olarak düşünmek, parça bütün ilişkisini sonsuz ve sıfır ile yapılan işlemlere genelleme, sıfırın hiçlik, yokluk ve boşluk sonsuzun ise çokluk olarak düşünülmesi de epistemolojik engel olarak ifade edilebilir. Young-Ok (2007) çalışmasında öğretmenlerin sıfır için "anlamsız-boş" ve "hiçlik" ifadelerini kullanmışlardır. Tarihsel gelişim sürecinde sıfıra ilişkin bu algılar sıfırın kullanımı ve sıfır ile işlemlerde zorluklar yaşanmasına neden olmuştur.

Belirsizlik kavramı ile ilgili dikkat çeken bir husus, öğrencilerin sonsuzluğu belirsiz bir kavram olarak düşünmeleridir. Bu nedenle öğrenciler, sonsuzla yapılan işlemlerin de belirsiz olduğunu düşünmektedirler. Bu durum derinlemesine incelenmesi gereken bir durumdur. Belirtilen kavram tanımlarına ilişkin öğrenci görüşleri, sonsuzluğun epistemolojik engellerinin bu kavramların anlaşılmasını zorlaştırdığını düşündürmektedir. Sırmacı ve Gökkurt Özdemir'in (2016) yapmış oldukları çalışmada da sonsuzun belirsizliğinden dolayı öğretmen adaylarının sonsuzla yapılan işlemlerin belirsiz olduğunu düşündükleri bulgusuna ulaşılmıştır.

Soyut bir kavram olan sonsuzluk, günlük yaşam modelleri ile doğrudan modellenememektedir. Bu nedenle sonsuzluğun formal olarak kavramsallaştırılmasında öğrencinin yaşam deneyimlerinden yararlanamayacağı söylenebilir. Bu da sonsuzluk kavramının oluşturulmasında epistemolojik bir engel olarak değerlendirilebilir (Pala ve Narlı, 2018). Günlük hayatta karşılığını bulamayan sonsuzluk kavramı, öğrencilerin anlamlandırmakta zorlandıkları kavramlardan birisidir. İçinde yaşadığımız dünya sonlu olduğundan ve sonsuzlukla ilgili gerçek referanslar olmadığından çocuklar sonsuzluğu kavramsallaştırmada sorunlar yaşamaktadırlar. Her ne kadar bu kavram çocuklara anlatılırken uygun bağlamlar oluşturulsa da, bunlar çocuklar için çok anlamlı gelmeyecektir (Monaghan, 2001). Kavram oluşturma sürecinden öğrencilerin gerçekleştirdikleri deneyimlerin, kavramın anlamlandırılmasında oldukça etkili olduğu bilinmektedir (Kieren ve Pirie, 1991). Esasında sonsuzu, sonsuzla yapılan işlemleri ve sıfırı ve sıfırla yapılan işlemleri günlük hayatta modelleyerek anlayabildiğimiz işlemlere benzetmeye çalışıyoruz. Hatta öğrencilerin verilen $\frac{\infty}{0}, \frac{0}{0}, \frac{3}{\infty}$ ifadelerinde örneğin "3'ün içinde ∞'u aramaları" ya da "0'ın içinde 0'ı aramaları" ilkokuldan bölme işlemini öğrenirken "bir sayının içinde bir sayının aranması" mantığı ile hareket ettikleri şeklinde yorumlanabilir. Öğretmenlerin bu ifadelere ilişkin açıklamalarında bölmenin bir parçayı belirten anlamını kullandıkları söylenebilir. Sıfıra bölme ile ilişkili olarak Karakuş (2017) her seviyede somut öğretimsel açıklamalarla eşit olarak paylaştırma ve tekrarlı çıkarma yaklaşımlarını kullanma eğiliminde olduklarını belirtmekte ve bu durumu geçmiş deneyimlerinde bölme işleminin anlamını paylaştırma ya da tekrarlı çıkarma yaklaşımlarını içeren örnek ya da açıklamalarla karşılaştıklarından dolayı olduğu şeklinde yorumlamaktadır. Nitekim benzer durum Young-Ok (2007) çalışmasında da görülmüştür. Ayrıca sayının içinde bir sayıyı aramayı anlamlandırabildiğimiz için sayının içinde de sonsuz arayarak anlamlandırmaya çalışıyoruz. İşte bu da sonsuzla yapılacak işlemlerdeki epistemolojik bir engel olabilir.

İrrasyonel sayılar, sonsuzluk, sıfır gibi pek çok kavramın gelişimi ve insanlar tarafından kabul görmesi matematik tarihinde bunalımlara neden olmuştur. Bu kavramların gelişimi sürecinde matematikçiler tarafından yaşanan tartışmalar ve zorlukların, bu kavramların öğrenilmesi sürecinde öğrenciler tarafından yaşanan zorluklara benzer oldukları görülmektedir. Öğrencilerin belirtilen kavramlar hakkında yaşadıkları zorlukların bir nedeni bu kavramlar hakkında yeterince bilgilendirilmemeleri, öğrenim hayatlarında bu kavramlara yeterince değinilmemiş olması olabilir. Zira lisans öğrenimlerinin son sınıfında olan öğrencilerin belirtilen kavramlarla ilgili yaptıkları tanım ve işlemler incelendiğinde birincil sezgileri ile oluşturdukları bu kavramların üzerine fazladan bilgi koymadıkları görülmektedir. O halde sınıf seviyesine uygun olarak bu kavramlar hakkında yapılacak tartışmalar ile öğrencilerin bu kavramlar hakkında düşünmeleri ve bilgilerini doğru bir şekilde oluşturmaları sağlanabilir. Öğrencilerin bilgilerini doğru bir şekilde oluşturmaları ise muhtemel kavram yanılgılarını önleyerek hatalar yapmalarına engel teşkil etmektedir. Ayrıca matematik tarihinde kavramların gelişim süreci ve bu süreçte matematikçilerin yaşadıkları zorluklar göz önüne alınarak matematik öğrencileri ve öğretmen adayları daha çok bilgilendirilebilirler. Bu amaçla lisans öğretim programlarında olan Matematik Tarihi dersleri, kavramların gelişim süreci ve yaşanan zorluklar hakkında farkındalıklarının artacağı şekilde düzenlenerek öğrencilere sunulabilir. Böylece gelişimleri yüzyıllar alan kavramlar farazi bir ders içeriği olarak kalmak yerine öğrencilerin profesyonel hayatlarında kullanabilecekleri olgular haline gelebilirler. Pek çok matematiksel kavramın yapısında bulunan epistemolojik engellerin, öğretmenler tarafından biliniyor olması ve öğretimini buna göre planlamasının önemli ve gerekli olduğu düşünülmektedir. Öğrencilerin sınırı olmayan ifadesini kullanma sebepleri ne olabilir? Sonlu ifadesi neden yeterli olmamıştır? Sonu olmayan bir şeyin sınırlı olabileceğini mi düşünmektedirler? Bu hususların ayrıca irdelenmesi gerekmektedir.

Summary

Introduction

Errors do not occur only due to ignorance, indecision or luck. Pre-existing correct information becomes incorrect if it cannot be adapted to the new situation. Such mistakes, which are not unexpected in the learning environment, create learning obstacles (Brousseau, 2002). One of learning obstacles, epistemological obstacles, is related to the nature of the mathematical concept. If there is an epistemological obstacle in learning a concept, this obstacle originates from the concept, that is, the knowledge itself. The epistemological obstacle, expressed as the limits that must be overcome and changed, is based on the view that what is already known prevents the discovery of new things (Theodoridis, 2017).

Some concepts, which caused controversy when they first appeared, made it difficult for mathematicians due to the difficulties in the nature of them. It took time for these concepts to be accepted. For this reason, epistemological obstacles are examined in conjunction with the history of mathematics. (Theodoridis, 2017). In the history of mathematics, it can be seen that there have been many crises regarding some mathematical concepts. The processes of accepting the existence of irrational numbers, negative numbers, zero, non-Euclidean geometries can be given as examples of these crises. The concept of infinity has also disturbed people. Throughout history, the concept of infinity, one of the basic concepts of philosophy, science and mathematics, has been a very challenging element for the human mind because our intuition is based on experiences in the finite world (Tsamir & Dreyfus, 2002). Like infinity, the concepts of undefined and uncertainty are also difficult and confusing issues. Many people do not clearly distinguish between these two concepts.

Method

In this study, it is aimed to determine the epistemological obstacles related to infinity, undefined and uncertainty. This study, which adopts the qualitative research paradigm, is basic qualitative research. The research group consists of 54 senior secondary school mathematics teacher candidates studying at the Faculty of Education and 17 senior students studying at the mathematics department of the Faculty of Science at a state university in Central Anatolia. The data of the study were obtained through a test applied to the students. This test, created by the researchers, consists of two parts. In the first part, the students were asked to explain the concepts of infinity, undefined and uncertainty with their own sentences. In the second part, they were asked to explain the expressions $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{0}$, $3.\infty$, $\frac{3}{\infty}$ mathematically. In this way, it is aimed to determine the differences and epistemological obstacles from the definitions and mathematical explanations of the students regarding the specified concepts. The data were analyzed using descriptive analysis technique.

Results and Discussion

According to the results of the research, it can be said that the explanations of the students about infinity were formed and continued intuitively (Fischbein, 2001). Accordingly, their understanding of infinity is mostly shaped by life experiences. It can be said that the intuitive infinity understanding of the students has not changed despite the undergraduate education. It can also be interpreted as students seeing infinity as an ongoing and increasing process. Having the knowledge that adding is a lasting process, the students associated the concept of infinity with adding. Thus, they thought that they could obtain an infinite set by adding infinite elements to a set. Considering the potential and actual infinity discussions in the historical development of infinity, it can be said that this situation constitutes an epistemological obstacle. Students mentioned operational, intuitive, potential and actual infinities. Students with the idea of operational infinity emphasized the ongoing and unending aspect of infinity. It has been observed that the language they use has an effect on the students' perceptions of the concepts of infinity, undefined, and uncertainty.

The fact that they use all the terms interchangeably, for example using uncertainty to explain the undefined, may be an indication of this situation. At the same time, the fact that they think that infinity is a continuous and unlimited process may be an indication that they have an epistemological obstacle due to language. In addition, the discourse on “dividing the non-existent into the non-existent” in operations with zero can be considered as an epistemological obstacle. In the history of mathematics, division by zero has occupied mathematicians and caused controversy. Therefore, it can be said that division by zero is also an epistemological obstacle.

One of the reasons for the difficulties experienced by the students about the mentioned concepts may be that they are not sufficiently informed about these concepts and that these concepts are not sufficiently mentioned in their education life. Having discussions about these concepts can enable students to think about these concepts and form their knowledge correctly. In addition, considering the development process of concepts in the history of mathematics and the difficulties faced by mathematicians in this process, mathematics students and teacher candidates can be more informed. For this purpose, History of Mathematics courses in undergraduate education programs can be presented to students by arranging them to increase their awareness about the development process of concepts and the difficulties experienced. Thus, concepts that take centuries to develop can become phenomena that students can use in their professional lives. It is thought that it is important and necessary that the epistemological obstacles are known by the teachers and that they plan their teaching accordingly. What could be the reasons for students to use the expression without limits? Why was

the finite expression not sufficient? Do they think that something without end can be limited? These issues also need to be examined in detail.

Pedagogical Implications

The concepts of infinity, undefined and uncertainty have been among the concepts that people have difficulty in making sense of throughout the history of mathematics. This challenge is also the case for students studying mathematics in undergraduate education. It is even more important to determine the understanding of these students who will be mathematics teachers in the future. By this way incomplete or misunderstandings about mathematical concepts can be identified and corrected. These incomplete or misunderstanding of mathematical concepts will also affect their teaching. In this respect, it is thought that this study, which determines the understandings of pre-service mathematics teachers and mathematics department students about the concepts of infinity, undefined and uncertainty, will contribute to the literature.

Araştırmanın Etik Taahhüt Metni

Yapılan bu çalışmada bilimsel, etik ve alıntı kurallarına uyulduğu; toplanan veriler üzerinde herhangi bir tahrifatın yapılmadığı, karşılaşılacak tüm etik ihlallerde "Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi ve Editörünün" hiçbir sorumluluğunun olmadığı, tüm sorumluluğun Sorumlu Yazara ait olduğu ve bu çalışmanın herhangi başka bir akademik yayın ortamına değerlendirme için gönderilmemiş olduğu sorumlu yazar tarafından taahhüt edilmiştir.

Kaynaklar

Angelo, R. W. (2009). *Undefined in philosophy and in mathematics.* 20.06.2021 tarihinde https://www.roangelo.net/logwitt/logwit54.html adresinden erişilmiştir.

Baştürk, S. (2014). Matematik öğretiminde öğrenci hatasının yeri: Hata ve engel kavramı. *Bilim ve Aklın Aydınlığında Eğitim, 14*(167), 14-13.

Brooks, J. and Brooks, M. (2001). *The case for constructivist classrooms.* Ohio: Merril Prentice Hall.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht:* Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G., (2002). Theory of *didactical situations in mathematic*s, Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. and Warfield, V. (Eds.), New York: Kluwer Academic Publishers.

Bütün, M., ve Erdoğan, N. (2020). Matematik öğretmenlerinin öğrencilerin sıfır kavramıyla ilgili anlayışlarına ilişkin bilgilerinin incelenmesi. *Cumhuriyet International Journal of Education, 9(*3), 961-982. https://doi.org/10.30703/cije.730314

Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2000). *Research methods in education* (5th edition). London: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203224342_chapter_1

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Çelik, D. ve Akşan, E. (2013). Matematik öğretmeni adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarına ilişkin anlamaları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 7*(1), 166-190. https://doi.org/10.12973/nefmed158

Dubinsky, E., Weller, K. and Mcdonald, M.A. (2005). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An Apos-Based Analysis: Part 1. *Education Studies Math*, 58, 335–359. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Fidan, T. ve Öztürk, İ. (2015). Perspectives and expectations of union member and non- union member teachers on teacher unions. *Eğitim Bilimleri Araştırmaları Dergisi, 5*(2), 191-220. https://doi.org/10.12973/jesr.2015.52.10

Fischbein, D. Tirosh and P. Hess (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 10*(1), 3-40. https://doi.org/10.1007/BF00311173

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2), 309-329. https://doi.org/10.1023/A:1016088708705

Harel, G. (2007). *What is mathematics? A pedagogical answer with a particular focus on proving.* In Third APEC-Tsukuba International Conference on Innovative Mathematics Teaching and Learning Through Lesson Study, Tokyo, Japan.

Gerstein, L. J. (2012). *Introduction to mathematical structures and proofs.* New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4265-3

Kanbolat, O. (2010). *Bazı matematiksel kavramlarla ilgili epistemolojik engeller* [Yüksek lisans tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

Karakaya, V., ve Sekman, D. (2019). *Matematiksel düşüncenin tarihi gelişimi ve eğitimde konumlanması*. F. Tanhan (Ed.) Türkiye eğitim vizyonu üzerine değerlendirmeler (s. 35-44). Ankara: Pegem Akademi.

Karakuş, F. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının öğretimsel açıklamalara ilişkin tercihleri: Sıfıra bölme konusu. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 8*(3), 352-377.

Kieren, T. E., and Pirie, S. E. (1991). *Recursion and the mathematical experience.* In L. Steffe (Ed.), The epistemology of mathematical experience (pp. 78-101). New York: Springer Verlag Psychology Series. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3178-3_6

Kolar, V. M. and Čadež, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Education Studies Math*, 80, 389–412. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9357-7

Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber (*Çev. S. Turan). Ankara: Nobel.

Miles, M, B., and Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook.* (2nd ed). Thousand Oaks, CA: Sage. Monaghan

Moru, E. K. (2006). *Epistemological obstacles in coming to understand the limit concept at undergraduate level: A case of the National University of Lesotho* [Doctoral dissertation]. University of the Western Cape, South Africa.

Olkun, S. ve Toluk-Uçar, Z. (2004). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi* (3. Baskı). Ankara: Anı Yayıncılık.

Özmantar, M. F. (2013). *Sonsuzluk kavramı: Tarihsel gelişimi, öğrenci zorlukları ve çözüm önerileri*. M. F. Özmantar, E. Bingölbali, ve H. Akkoç (Ed.), Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri (s. 151-180) (3. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Özmantar, M. F. ve Bozkurt, A. (2013). *Tanımsızlık ve belirsizlik: kavramsal ve geometrik bir inceleme.* İ.Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, Şandır, H. , ve A. Delice (Ed.), Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar (s. 437-461) (1. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Öztürk, Z. (2018). *Cantor ve Hilbert bağlamında sonsuzluk kavramının çözümlenmesi.* N. İnönü (Ed.). Uluslararası İstanbul Felsefe Kongresi Bildiri Kitabı (s. 111-124). İstanbul: Mantık Derneği Yayınları.

Pala, O. ve Narlı, S. (2018). Sonsuzluğun tarihsel gelişimi ve öğretimi üzerine. *Apsistek,* 1-6. 24.07.2021 tarihinde https://www.academia.edu/37669464/Sonsuzlu%C4%9Fun_Tarihsel_Geli%C5%9Fimi_ve_%C3%96%C4%9Fretimi_%C3%9Czerine adresinden erişilmiştir.

Pogliani, L., Randic, M., and Trinajstić, N. (1998). Much ado about nothing—an introductive inquiry about zero. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(5), 729-744. https://doi.org/10.1080/0020739980290509

Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. England Middlesex: Penguin Books.

Sırmacı, N. ve Gökkurt Özdemir, B. (2016). Matematik öğretmenlerinin sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarına ilişkin öğretimsel açıklamaları, *Bartın Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 5*(3), 788-806. https://doi.org/10.14686/buefad.v5i3.5000201306

Singer, F. M. and Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *Journal of Mathematical Behavior* 27, 188–205. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.06.001

Tsamir, P. and Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets — a process of abstraction. The case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 1–23. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00100-1

Theodoridis, S. (2017). *Students' perception of infinity perception, obstacles, conception* [Master thesis] University of Agder.

Tirosh, D. (1991). *The role of students' intuitions of infinity in teaching the Cantorian theory*. Ed. (David Tall). Advanced Mathematical Thinking (pp. 199-214). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_12

Ülger, A. (2003). Matematiğin kısa bir tarihi. *Matematik Dünyası,* 2, 49-53.

Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (6. baskı) Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Young-Ok, K. (2007). Explaining the impossibility of division by zero: approaches of chienes and korean middle school matehamatics teachers. Journal of the Korea society of mathematical education series D: Research in mathematical education, 11(1), 33-51.