

8. Sınıf Öğrencilerinin Eğitim-Kavramına Yönelik Kavrayışları

Emine Aytekin-Kazanç¹

Ece Acar-Çakırca²

Mine Işıksal-Bostan³

Type/Tür:

Research/Araştırma

Received/Geliş Tarihi: February 4/
4 Şubat 2021

Accepted/Kabul Tarihi: August 3/ 3
Ağustos 2021

Page numbers/Sayfa No: 1535-1561

Corresponding Author/İletişimden

Sorumlu Yazar:

aytekinem@gmail.com

✓ iThenticate®

This paper was checked for plagiarism using iThenticate during the preview process and before publication. / Bu çalışma ön inceleme sürecinde ve yayımlanmadan önce iThenticate yazılımı ile taranmıştır.

Copyright © 2017 by Cumhuriyet University, Faculty of Education. All rights reserved.

Öz

Bu çalışmada, 8. Sınıf öğrencilerinin gerçek yaşam durumlarını grafik üzerinde gösterme performanslarının, eğitim kavramının temelindeki birim oran veya değişim oranını farklı temsilleriyle (geometrik ve cebirsel oran, fonksiyonel özellik) ne derece anlamlandırabildiklerinin ve farklı eğitim temsillerini birbiri ile nasıl ilişkilendirdiklerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Ek olarak, öğrencilerin verilen durumları eğitim kavramı ile ilişkilendirme düzeyleri incelenmiştir. Katılımcılar, iki devlet okulundan kolay ulaşılır örneklem yöntemiyle seçilmiş; 158 sekizinci sınıf öğrencisinden oluşmaktadır. İlk, veri toplama aracı olarak; dört açık uçlu problem ve alt soruları kullanılmıştır. Bu problemlerden biri durağan durumu, diğer üçü dinamik gerçek yaşam durumlarını içermektedir. Alt sorular oluşturulurken; farklı eğitim temsilleri (fiziksel özellik, fonksiyonel özellik, cebirsel oran, geometrik oran ve doğrusal sabit) dikkate alınmıştır. Daha sonra, bu problemlere verdikleri cevaplara göre seçilen dört öğrenci ile görev temelli görüşmeler yapılmıştır. Çalışmanın bulguları, öğrencilerin çoğunun, değişim oran veya birim oran'ı doğru hesaplayabildiklerini fakat grafiği, noktaları koordine ederek çizdiklerini ve eğitim temsillerini açıklarken grafiği görsel olarak kullandıklarını göstermiştir. Ayrıca görüşmelerde, durağan durumda, geometrik oran temsili anlamlandırabilen öğrencilerin geometrik oran ile fonksiyonel özellik temsili ilişkilendirmede ve doğrusal sabit temsilde zorlandıkları görülmüştür. Ek olarak, öğrencilerin eğitim kavramını dinamik durumlara nispeten durağan durum ile daha fazla ilişkilendirdikleri bulunmuştur. Bu nedenle, öğrencilerin farklı eğitim temsilleri arası ilişkiyi kurabilmeleri için, hem dinamik hem de durağan durumların grafik gösterimlerinin işlevsel olarak kullanımı önemlidir.

Anahtar Kelimeler: Değişim oranı, eğitim, eğitim temsilleri, ortaokul öğrencileri, diklik

Suggested APA Citation/Önerilen APA Atıf Biçimi:

Aytekin-Kazanç, E., Acar-Çakırca, & Işıksal-Bostan, M. (2021). 8.Sınıf öğrencilerinin eğitim kavramına yönelik kavrayışları. *Cumhuriyet International Journal of Education*, 10(4), 1535-1561. <http://dx.doi.org/10.30703/cije.874553>

¹ Arş. Gör., Düzce Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Düzce/Türkiye
Res. Ass., Düzce University, Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education, Düzce/Turkey
e-mail: aytekinem@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-1068-4306>

² Matematik Öğretmeni, Milli Eğitim Bakanlığı, İstanbul/Türkiye
Mathematics Teacher, Ministry of National Education, İstanbul/Turkey
e-mail: eccecarca@outlook.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4248-7561>

³ Prof. Dr., ODTÜ, Eğitim Fakültesi, , Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Ankara/Türkiye
Prof. Dr., Middle East Technical University, Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education, Ankara/Turkey
e-mail: misiksal@metu.edu.tr ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7619-1390>

Eighth Grade Students' Understanding of Slope Concept

Abstract

In this study, it was aimed to investigate the eight grade students' performance on drawing graphs of real world situations, to what extent they can interpret unit rate and rate of change concepts with its different representations (geometric and algebraic ratio, functional property), and how they relate different slope representations with each other. In addition, it was examined to what extent they can relate the given situations with the slope concept. Participants consisted of 158 eight-grade students who were selected from two public schools via convenience sampling. First, four-open ended and its sub-problems were used as data collection instrument. One of those problems included static situation and three of them included dynamic real world situations. While formulating sub-questions, different slope representations including physical property, functional property, algebraic ratio, geometric ratio and linear constant were considered. Next, task-based interviews were held with four students selected based on their responses to the four problems. The findings of this study showed that most of the students could calculate the rate of change or unit rate correctly however, they sketched graph by coordinating pairs and they used graphics as figurative while explaining representations of slope. It was also seen that students who had an understanding of geometric ratio in the static situation met a challenge of relating representation of geometric ratio with functional property and linear constant representation in the interviews. In addition, it was found that, students associated the slope concept more with the static context than dynamic contexts. Therefore, to make students to establish relations between different representations of slope, it is important to use the graphical displays of both dynamics and static situations as operative.

Keywords: Rate of change, slope, slope conceptualization, middle school students, steepness

Giriş

Ulusal ortaokul matematik programında günlük hayatın içindeki matematiği öğrencilere fark ettirmenin önemi üzerinde durulmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı, [MEB], 2018). Eğitim günlük hayat ve diğer disiplinler ile yakından ilişkili olan bir kavramdır. Bu ilişki, örneğin rampa veya merdivenler ile ilgili mühendislik uygulamalarında, fen ve teknoloji derslerindeki hız-zaman veya zaman-pozisyona ait grafik analizlerinde görülmektedir (Planinic, Milin-Sipus, Katic, Susac ve Ivanjek, 2012; Smith vd., 2013). Günlük hayat ve diğer disiplinlerle içiçe olan eğitim aynı zamanda birçok matematiksel kavram ve konunun anlaşılması için de kritik öneme sahiptir. Örneğin, eğitim kavramı ilköğretimde doğrusal denklemler ve oran konularında (Stump, 1997) karşımıza çıkarken, ortaöğretim ve yükseköğretimde fonksiyon, değişim oranı, kovaryasyonel düşünme, limit, türev, trigonometri gibi önemli konu ve becerilerin temelini oluşturmaktadır (Carlson, Oehrtman ve Engelke, 2010; Moore-Russo, Conner ve Rugg, 2011). Bu kadar önemli bir kavram olmasına rağmen eğimin birçok temsille ifade edilebilmesi bu kavramın öğretimini karmaşık hale getirmektedir (Nagle, Martínez-Planell ve Moore-Russo, 2019). Bu bağlamda, öğrencilerin genelde eğitim ile ilgili kavrayışlarının incelenmesi, özelde ise günlük hayat durumları içerisinde verilen eğitim kavramını anlamlandırmaları ve bu kavramı farklı temsil biçimleriyle ilişkilendirmeleri kritik öneme sahiptir. Bu çalışma, gerçek yaşam durumları içeren problemler verildiğinde, 8. Sınıf öğrencilerinin verilen duruma ait grafiği çizme performansları ve nasıl anlamlandırdıklarına odaklanmıştır.

Ayrıca, öğrencilerin eğimin temelindeki birim oranı kavrayışlarını, diğer temsilleri ile ilişkiyi ne derece kurabildiklerini ve verilen durumu eğim kavramı ile ilişkilendirme performanslarını incelemiştir.

Eğim ve Programdaki Yeri

Eğim en genel anlamda doğrunun dikliğinin ölçümüdür (Stump, 1997). Alanyazınına baktığımızda eğim kavramını tanımlarken farklı temsil biçimlerine vurgu yapıldığı görülmektedir. Stump (1997, 2001a) eğim kavramının *geometrik oran*, *cebirsal oran*, *fiziksel ve fonksiyonel özellik*, *parametrik katsayı*, *kalkülüs ve trigonometrik olarak* tanımlanabileceğini belirtmiştir. Eğim kavramı *geometrik oran* olarak; bir doğru grafiğindeki dikey mesafenin yatay mesafeye oranı olarak temsil edilirken; *cebirsal oran* olarak, $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ temsil edilebilir. Bunun yanı sıra, eğimin *fiziksel özellik* anlayışı ise; "eğimli", "diklik", "eğimli yüzey", "rampa" "açı" gibi kavram ve ifadelerle ilişkilendirilmektedir. Diğer taraftan, eğime yönelik *fonksiyonel özellik* temsil çeşidi; iki değişkene ait değişimlerinin birbirine oranı diğer bir deyişle değişim oranı; *parametrik katsayı* temsil çeşidi ise $y=mx+b$ şeklinde ifade edilen doğrusal ilişkide, m katsayısı olarak tanımlanmaktadır. *Trigonometrik* temsili tanjant ($m=\tan \theta$); *kalkülüs* temsili ise türev kavramı ile ilişkilendirilmektedir. İleriki bir çalışmada, Stump (2001b) bu sınıflamalarına, durağan ve dinamik fonksiyonel durumları içeren *gerçek yaşam durumları* temsili de eklemiştir. Durağan durumlara, çatının eğimi veya merdiven dikliği; dinamik fonksiyonel durumlara ise zamana bağlı olarak alınan yol ilişkisi örnek olarak verilebilir. Daha yakın zamanda, Moore-Russo vd. (2011) eğimin kavramsallaştırılmasına ilişkin bu kategorilere, *belirleyici özellik* (doğrunun paralel veya dik olma durumu), *davranış göstergesi* (doğrunun yatay olma veya yükselme-alçalma özelliği) ve *doğrusal sabit* (düzlüğün sabit bir değer olarak görülmesi) kategorilerini ekleyerek genişletmiştir. Görüldüğü gibi, eğim kavramı çok geniş bir çerçevede ve farklı temsil biçimleri kapsamında ele alınabilir. Bu çalışmada, bu tanımlamalar temel alınarak gerçek yaşam durumu temsili çerçevesinde değişim oranının geometrik oran, cebirsal oran, doğrusal sabit ve fonksiyonel özellik temsilleri açısından öğrenci kavrayışlarının üzerinde durulmuştur.

Bu temelde, eğimin geometrik, cebirsal ve fonksiyonel temsilleri ile ilişkili olan kovaryasyonel düşünme, eğimin anlamlandırma sürecine ilişkin önemli ipuçları veren diğer bir beceridir. Kovaryasyonel düşünme, iki farklı niceliğin aynı anda değişimini koordineli bir şekilde inceleyebilme becerisi olarak tanımlanabilir (Carlson, Larsen ve Lesh, 2003). Grafik gösterimlerindeki kovaryasyon anlamına odaklanması, doğrusal ilişkinin kavramsal öğrenilmesine destek olur (Thompson ve Carlson, 2017).

Ulusal ve uluslararası ortaokul matematik programlarında eğim kavramı konu olarak genellikle sekizinci sınıf düzeyinde yer almaktadır (Common Core State Standards for Mathematics [CCSSI], 2010; MEB, 2018; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Bu kavramın öğretimine uluslararası düzeyde 11-14 yaş aralığında başlanıldığı da belirtilmekte (Stanton ve Moore-Russo, 2012) ve ilgili kazanımlarda kovaryasyonel düşünmeye vurgu yapıldığı görülmektedir (Thompson ve Carlson, 2017). Ulusal Ortaokul Matematik Öğretim Programı'nda ise 8. sınıf öğrencilerinin doğrunun eğimini modeller kullanarak açıklamaları ve doğrusal denklem, grafik ve tablolar ile ilişki kurmaları beklenmektedir (MEB, 2018). Böylece

eğimin farklı temsil biçimlerine ve kovaryasyonel düşünme ile ilgili olan ilişkisine programlarda dolaylı biçimde vurgu yapıldığı söylenebilir. Diğer açıdan, bu vurgunun öğrenci öğrenmelerine nasıl yansıdığına incelenmesi de önemlidir (Nagle ve Moore-Russo, 2014).

İlişkili Alanyazın

Eğime ilişkin temsil çeşitlerinin ve eğitim kavramının temelindeki kovaryasyonel düşünme ile yakından ilişkisinin önemi vurgulanmış olmasına rağmen öğrenimde karşılaşılan güçlükler birçok çalışmanın konusu olmuştur. Bu nedenle, çalışmalar üniversite, lise veya ortaokul düzeyindeki öğrencilerin farklı temsillerde sunulan eğitim kavramına ilişkin sahip oldukları işlemsel ve kavramsal zorlukları ortaya çıkarmaya ve eğimin öğrenme ve öğretim sürecinin incelenmesine yoğunlaşmıştır.

Üniversite öğrencilerinin yaşadığı zorlukları (Dolores-Flores, Rivera-López ve García-García, 2019; Stump, 2001a; Teuscher ve Reys, 2010) benzer şekilde ortaokul öğrencilerinin de eğimi anlamlandırırken veya temsil çeşitleri ile bağlantı kurarken yaşadıklarını gösteren birçok çalışma mevcuttur. Bu zorluklar ve yanılgılar; eğimi sadece yüksekliğe bağlı olarak değiştiğini düşünme yanılgısı (Clement, 1985) ve eğimi ölçüm olarak düşünmeksizin sadece bir sayı (kesir) olarak değerlendirme yanılgısı (Lobato ve Thanheiser, 2002; Walter ve Gerson, 2007) şeklinde sıralanabilir. Ayrıca, grafik çizimlerinde eğimin ve y-kesişiminin anlamlandırılmasında yaşanan kavramsal zorluklar (Hattikudur vd., 2012; Planinic vd., 2012) ile aynı doğru üzerinde nokta/lar değişince eğimin değişeceği (Tanışlı ve Bike-Kalkan, 2018) yanılgısı da eklenebilir. Örneğin; sekizinci sınıf öğrencileriyle yapılan Tanışlı ve Bike-Kalkan'ın (2018) çalışmasında, katılımcıların doğrusallığı açıklarken ve doğrunun eğimini bulurken düşük performans sergilediği belirtilmiştir. Son olarak, eğitim kelimesinin doğrudan kullanıldığı çalışmalarda, öğrencilerin birim oranı bulmada sıkıntı yaşamazken, durum içindeki birim oranı anlamlandırmada zorlandıkları görülmüştür (örn., Planinic vd., 2012).

Temsil çeşitleri açısından incelendiğinde ise, çalışmalar öğrencilerin eğimin farklı temsilleri arasında ilişki kurarken de zorluklarla karşılaştıklarını göstermektedir (Birgin, 2012; Deniz ve Uygur-Kabael, 2017; Hattikudur vd., 2012). Örneğin, Deniz ve Uygur-Kabael'in (2017) çalışmasında bazı öğrencilerin geometrik oran ile cebirsel oran arasındaki ilişkiyi kurarken zorlandıkları belirtilmiştir. Öğrencilerin cebirsel oranı ezber düzeyinde anlamlandırdıkları ve çoğunlukla geometrik orandan yola çıkarak cebirsel orana geçiş yaptıkları vurgulanmıştır. Benzer bir çalışmada, Birgin (2012) sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik ve cebirsel temsilleri arasında geçişi anlamlandırmada zorluk çektiklerine işaret etmektedir. Daha özelde, öğrencilerin %64'ü sembolik olarak verilen denklemin eğimini bulabilirken, öğrencilerin daha azı (%50) verilen grafiğin eğimini bulmuştur. Öğrencilerin verilen sözlü durumların grafiğini çizme süreçlerini inceleyen Hattikudur vd'nin (2012) 180 öğrenci (6, 7 ve 8. Sınıfları içeren) ile yürüttükleri çalışma temsil çeşitleri özelinde değerlendirilmiştir. Çalışmanın bulgularında, sözlü olarak verilen durumda, eksenlerde sayısal değerlerin belirtildiği (nicel) ve belirtilmediği grafiklerde (nitel) öğrenci çizimlerindeki doğru yapma oranları ve kavram yanılgıları sunulmuştur. Bu bulgular, nitel olarak sunulan grafiği anlamlandırmada öğrencilerin daha çok güçlük çektiklerine ve grafikte eğimi daha

kolay gösterebilirken y kesişimini anlamlandırırken zorlandıklarına işaret etmektedir. Bu bulgu, öğrencilerin geometrik ve cebirsel oran temsillerini doğrusal sabit veya fonksiyonel özellik temsillerine nispeten daha kolay anlamlandırabildiklerini gösterebilir.

Öğrencilerin eğimi noktalar veya değişkenler arası fark olarak düşünmekte; farklar arasındaki oran veya değişim oranı olarak göremedikleri çalışmalarla saptanmış olup öğrencilerin eğimin farklı temsilleri arasında geçiş yapma becerilerine sahip olmasının önemi ortaya çıkmıştır (Nagle, Martínez-Planell ve Moore-Russo, 2019; Stanton ve Moore-Russo, 2012). Temsil çeşitlerine ilişkin yapılan çalışmalarda, genelde iki temsil arasında ilişkinin incelenmesi (cebirsel-geometrik oran veya fiziksel özellik-geometrik oran) dikkat çekmektedir (Birgin, 2012; Deniz ve Uygur-Kabael, 2017; Hattikudur vd., 2011). Bu nedenle, fonksiyonel özellik, geometrik ve cebirsel oran temsilleri arasında kurulan üçlü ilişkinin önemi ve bu temsil çeşitlerine ilişkin ortaokul öğrencileri ile yapılan çalışmaların sınırlılığı dikkate alınarak bu çalışma yürütülmüştür. Gerçek yaşam durumları içeren problemler verildiğinde 8. Sınıf öğrencilerinin durumları grafik üzerinde gösterme performansları, eğitim kavramının temelindeki birim oranı kavrayışları ve farklı eğitim temsilleri arasında bağlantılar oluşturabilme becerileri incelenmiştir. Ayrıca verilen durumları eğitim kavramı ile bağdaştırma düzeylerini incelemek amacıyla bu çalışma yürütülmüştür. Bu amaç doğrultusunda, şu sorulara cevap aranmıştır:

1. Öğrencilerin durağan ve dinamik sözel durumları grafik üzerinde gösterme performansları nasıldır?

1.1. Öğrenciler iki değişkenin eş zamanlı değişen dinamik fonksiyonel durumlarını grafik gösterimi üzerinde nasıl ifade etmişlerdir?

2. Sekizinci sınıf öğrencileri dinamik ve durağan sözel durumlarda eğitim kavramının temelindeki birim oran/değişim oranı'nı bulmadaki performansları nasıldır?

2.1. Öğrenciler farklı temsil çeşitlerini birbiri ile nasıl ilişkilendiriyorlar?

3. Verilen günlük yaşam durumlarını eğitimle bağdaştırma oranları nedir?

Yöntem

Durum çalışmaları, kişi veya grubun özelliklerinin ve herhangi bir duruma ilişkin düşüncelerinin ve algılarının ne, nasıl ve niçin sorularına cevap verebilecek şekilde derinlemesine analiz edilmesini sağlayan nitel bir araştırma yöntemidir (Cohen, Manion ve Morisson, 2007). Bu çalışma, sekizinci sınıf öğrencilerinin eğimin temelindeki birim oranı anlamlandırabilme, temsil çeşitleri arasında bağlantı kurabilme ve eğitim konusu ile verilen durumu ilişkilendirebilme performansları derinlemesine analiz edildiği için nitel bir araştırma yöntemi olan bir durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Sekizinci sınıf öğrencilerinin eğitim kavramını anlamlandırma süreçleri de bütüncül olarak ele alındığından dolayı, araştırma aynı zamanda tekli durum çalışması deseni örneğidir. Bu çalışma, 2018-2019 eğitim-öğretim yılının bahar döneminde gerçekleştirilmiştir.

Çalışma Grubu

Bu çalışmanın katılımcıları, Ankara ilinde bulunan iki ayrı ortaokulda öğrenim gören 93'ü kız ve 65'i erkek olup; 158 öğrenciden oluşmaktadır. Kolay ulaşılabilir örnekleme yöntemi ile seçilen bu okullar devlet okulları olup; bu okullarda öğrenim gören

sekizinci sınıf öğrencilerin sosyo-ekonomik düzeyleri orta seviyededir. Katılımcıların okullara göre cinsiyet dağılımları ve yüzdeleri Tablo 1’de verilmiştir. Çalışma grubundaki bireyler Ö1, Ö2, ... Ö158 şeklinde isimlendirilmiştir.

Görev temelli görüşme (Goldin, 2000) tekniklerinden biri olan açık uçlu yönlendirme (open-ended prompting) (Clement, 2000) kullanılarak; öğrencilerin eğitim kavramına ilişkin anlayışlarının ortaya çıkartılması hedeflenmiştir. Bu doğrultuda, görevlere verilen cevaplar ışığında temsil çeşitleri arasındaki ilişkileri farklı kuran ve detaylı açıklamaları olan sekiz öğrenci belirlenmiş olup; bu öğrencilerin sözlü ifade yeteneğine ve matematik başarısına göre öğretmenlerinden görüş alınmıştır. Elde edilen önbilgilere göre düşüncelerini ifade etmekte sıkıntı çekmeyen dört öğrenci matematik derslerindeki başarılarına (ikisi orta, diğerleri orta altı ve orta üstü) göre klinik görüşme için amaçlı örnekleme ile belirlenmiştir.

Tablo 1

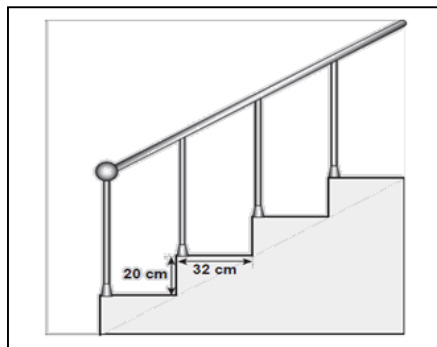
Cinsiyete Göre Okullardaki Öğrenci Dağılımları

Okullar	Erkek N (%)	Kız N (%)	Toplam N (%)
A Okulu	19 (35)	36 (65)	55 (35)
B Okulu	46 (45)	57 (55)	103 (65)
Toplam	65 (41)	93 (59)	158 (100)

N=örneklem büyüklüğü; % = yüzdeler değeri

Veri Toplama Araçları

Bu çalışmanın verileri, dört adet açık uçlu problem ve alt sorularından oluşan soru seti ve yarı-yapılandırılmış görüşmeler vasıtasıyla iki aşamada toplanmıştır. İlk aşamada, öğrencilerin eğitime yönelik kavrayışları açık uçlu, günlük yaşam durumlarını ve eğitimin farklı temsillerini yansıtan bağlamları içeren dört görevle ölçülmeye çalışılmıştır. Eğitime ilişkin *günlük yaşam durumları* temsili durağan ve dinamik olarak ikiye ayrılmaktadır (Stump, 2001b). Bu iki durum özelinde hazırlanan dört görev ve temsil çeşitlerine ilişkin alt sorularla, öğrencilerden problem durumuna ilişkin verileri tablo veya grafiğe dökmeleri ve birim oran ile birim oranı oluşturan değişkenler arasındaki ilişkiyi sorgulamaları istenmiştir. Ayrıca alt sorularla, farklı temsil çeşitlerinde birim oranı ifade etmeleri ve açıklamaları istenmiştir. Ek olarak, öğrencilerin buldukları ve irdeledikleri birim oranı hangi matematiksel konu veya kavram ile ilişkilendirdikleri sorgulanmıştır.



Şekil 1. Merdiven basamağı problemindeki görsel (Görev 1)

Eğimin fiziksel özellik (durağan) ve geometrik oran temsillerine uygun olarak, merdiven, rampa gibi günlük yaşam durumları kullanılabilir (Stump, 2001b). Bu sebeple merdiven durumunu içeren ilk görev (Şekil 1) oluşturulmuştur. Öğrencilerin eğitim formülü ile diklik arasındaki ilişkiyi formel olarak kurabilmeleri önemlidir (Thacker, 2020). Bu nedenle bu göreve ilişkin alt sorularda, birim oranı oluşturan dikey ve yatay yüksekliğin değiştiği durumlarda eğimi oluşturan elementler (dikey ve yatay mesafe) ile diklik arasındaki ilişki sorgulanmıştır.

Diğer sorular ise, eğim ile ilgili farklı dinamik günlük yaşam durumlarını içermektedir. İkinci görev (Şekil 2) su ile doldurulan bir akvaryumda, zaman ve akvaryumdaki suyun yüksekliğine ilişkin (National Assessment of Educational Progress [NAEP], 2013) iken üçüncü görev; Stump'ın (2001b) büyüme miktarının zamana bağlı olarak değişmesini içeren sorusundan uyarlanmıştır. İkinci soruda değişim oranının değeri verilirken, üçüncü soruda değişkenlerin aldıkları değerler verilmiştir. Son görevde ise örüntü örneği (Şekil 3) verilmiştir. Her üç görev de dinamik olmasına rağmen, ikinci görevde birim oran verilirken; üçüncü ve dördüncü görevde değişkenlerin aldığı değerler verilmiştir.

<p>Buğra her biri saatte 10 lt su akıtan iki hortum ile 80 lt hacme sahip dikdörtgen şeklindeki bir akvaryumu dolduruyor. Akvaryumun yarısı dolduktan sonra, bir hortumu kapatıyor. Buna göre;</p>	<p>Yanda verilen örüntüye göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.</p>
	<p>1. adım </p> <p>2. adım </p> <p>3. adım </p>

Şekil 2. Havuzdaki su problemi (Görev 2) Şekil 3. Kare sayısı problemi (Görev 4)

Soruların içerdiği temsil çeşitleri Tablo 2' de sunulmuş olup; sorulara ilişkin detaylara aşağıda değinilmiştir.

Tablo 2

Görevlere ait Alt Soru Örnekleri ve Temsil Çeşitleri

Görevler	Temsil çeşitleri	Örnek Alt sorular
Görev 1	Durağan, geometrik oran	<ul style="list-style-type: none"> ✓Farklı basamaklardaki yüksekliklerin derinliklerine oranını karşılaştırdığımızda, bu oran değerleri arasında ne tür bir ilişki vardır? Cevabınızı açıklayınız. ✓Basamakların sadece derinliği artarsa oran değeri ve merdivenin dikliği nasıl değişir? ✓Hesapladığınız oranın matematikte bir karşılığı var mıdır? Hangi matematiksel kavram ile bağdaştırabilirsiniz?
Görev 2	Dinamik, fonksiyonel özellik, doğrusal sabit, cebirsel oran	<ul style="list-style-type: none"> ✓Grafığe bakıldığında havuz tek hortumla doldurulurken mi iki hortumla doldurulurken mi daha hızlı dolar? Cevabınızın nedenini açıklayınız. ✓3. ve 6. saat aralığında su miktarı ile zaman değişimi arasındaki oran kaçtır? Nasıl buldunuz? Açıklayınız.
Görev 3	Dinamik, cebirsel oran, doğrusal sabit, fonksiyonel özellik	<ul style="list-style-type: none"> ✓Çağla'nın 1 yıl içindeki büyüme hızı ile 7-13 yaş arasındaki büyüme hızı arasında ne tür bir ilişki vardır? Açıklayınız. ✓Çağla'nın 18 yaşındaki boyunun uzunluğunu bulunuz.
Görev 4	Dinamik, cebirsel oran, Parametrik katsayı	<ul style="list-style-type: none"> ✓Grafikteki doğru denkleminin ve bulduğunuz oran ile ilişkisini açıklayınız?

Öğrencilerden verilen her durum için birim oranı, örneğin yüksekliğinin genişliğine oranını, birim zamandaki su miktarındaki değişimi yorumlamaları, grafiğini veya tablosunu oluşturmaları ve değişkenler arasındaki ilişkiyi keşfetmeleri istenmiştir. İki soruda (Görev 3 ve 4) grafiği göz önünde bulundurarak doğrunun denklemini birim oran ile ilişkilendirip yorumlamaları beklenmiştir. Her bir göreve ilişkin bulunan/verilen birim oranı hangi kavramla ilişkilendirdikleri sorulmuştur. Soruların sınıf seviyesine ve eğimin anlamlandırma sürecine olan uygunluğu Matematik Öğretim Programı'nda belirtilen kazanımlara ve çalışma amacına göre bu çalışmanın yazarları ve bir matematik öğretmeni tarafından incelenmiştir. Birinci göreve ilişkin bir alt soru diğer bir alt soru ile paralellik gösterdiği için ilgili alt soru çalışmadan çıkarılmıştır.

İkinci aşamada ise görev temelli görüşmeler yapılarak veri toplanmıştır. Görev temelli görüşmeler (Goldin, 2000), katılımcıların göreve ilişkin daha detaylı görüşlerini almak amacıyla yapılan klinik görüşmelerin özel bir halidir. Bu yöntem, katılımcıların mevcut ve gelişmekte olan matematiksel bilgilerini, problem çözme davranışlarını veya çıkarımlarını detaylı bir şekilde incelenmesine olanak sağladığı için matematik eğitimi araştırmalarında sıklıkla kullanılmaktadır (Koichu ve Harel, 2007; Maher ve Sigley, 2020). Klinik görüşme sürecinde öğrencilerin önceden gördüğü veya ilk kez karşılaştıkları görevlere verdikleri cevaplara göre matematiksel düşüncelerine veya problem çözme becerilerine ilişkin öngörü kazanılır (Maher ve Sigley, 2014). Bu nedenle seçilen dört öğrencinin görevlere ilişkin verdikleri cevapları tekrar düşünmeleri istenmiştir. Örneğin, değişim oranının durum içinde sabit kalıp kalmadığına dair sorularda (Görev 2 (g) ve Görev 3 (d)) "Nasıl buldun? Bu soruyu tekrar düşünür müsün?" gibi ek sorular yöneltilmiştir. Ayrıca, ilk ölçekte bulunan sorulardan farklı olarak, her bir bağlam durumunda hesapladıkları veya verilen oranın anlamı sorulmuş ve oranı grafik kullanarak bulmayan öğrencilerden, grafikten faydalanarak açıklamaları istenmiştir. Bu amaçla Hunting'in (1997) önerdiği sıralanan sorular sorulmuştur: Ne düşünüyorsun? Nasıl karar verdin? Sesli olarak ne yaptığını anlatır mısın? Arkadaşın grafikten yola çıkarak suyun akma hızı ile ilgili yorum yapabileceğini söyledi, katılıyor musun? Sen nasıl bir yorum yapardın? Böylece, yaklaşık elli dakika süren klinik görüşmelerde öğrencilerin görevlere verdikleri cevapları açıklamaları istenmesinin yanısıra, onlara eğimin farklı temsillerinden yola çıkarak birim oranı kavrayışlarını ölçebilmek adına ek sorular yöneltilmiştir.

Verilerin Analizi

Verilerin analizi sürecinde önceden belirlenen kategorilere veya verilerden elde edilen bulguya göre kodlama yapılabilir (Strauss ve Corbin, 1998). Bu çalışmada, öğrencilerin açık uçlu görevlere ilişkin cevapları, eğimin kavramsallaştırılması ile ilgili vurgu yapılan elementlere ve temsil çeşitlerine (Moore-Russo vd., 2011; Planinic vd., 2012; Teuscher ve Reys, 2010) göre kategori ve alt kodlar belirlenmiştir. Her bir görevde sorulan alt sorulara öğrencilerin verdikleri cevaplar, bu element ve temsil çeşitlerine göre kodlanmıştır. Bazı görevlerin doğası ve alt soruların farklılığı, her bir görevde aynı kategoride olan kodların veya kategorilerin değişikliğine sebep olmuştur. Örneğin "Grafik çizimi" birinci görev dışındaki üç görevde sorgulandığı için, bu kategori ilk görevde oluşmazken; diğer üç görevde karşımıza çıkmaktadır. Diğer bir yandan, her bir görev için kodlama çerçevesinde "birim oranın bulunması ve

ilişkilendirilmesi" kategorisi bulunmasına rağmen kodları farklılık göstermektedir. Bu kategoriye oluşturan kodlar; birim oranın bulunmasını, birim oranı oluşturan değişkenler arası ilişkiyi veya ilgili temsil çeşitlerinin anlamlandırılmasını kapsamaktadır. Bu nedenle, bu kategorideki her bir görev için alt kodlar, sorguladığı eğitim temsiline göre belirlenmiştir.

Kodlamaya, öğrencilerin grafik çizimlerine ilişkin (dinamik durumlar) cevapları Thompson ve Carlson'ın (2017) oluşturduğu kovaryasyonel düşünme seviyelerine göre analiz edilmesiyle başlanmıştır. Bu seviyeler, koordine edememe, ön koordine etme, kabaca koordine etme, değerleri koordine etme, parçalı sürekli kovaryasyon ve kesintisiz sürekli kovaryasyondur (Thompson ve Carlson, 2017, s. 441). Buna göre, koordine edememe seviyesindeki veya boş bırakılan cevaplar yanlış; değerleri kabaca koordine etme kısmen doğru; parçalı ve kesintisiz sürekli kovaryasyon seviyesindekiler ise doğru olarak kodlanmıştır. Grafik çizimi kategorisine ek olarak, birim oranın bulunması ve ilişkilendirilmesi, cebirsel çözüm, eğitim kavramı ile bağdaştırma diğer kategoriler olarak belirlenmiştir. Belirlenen kategorilerin kodları ise her bir görevin alt soruları ve doğasına göre teori ve veriden gelen kod çerçevesine (Schreier, 2012) göre belirlenmiştir. Bu kategorilere ilişkin öğrenci cevapları "doğru", "kısmen doğru" ve "yanlış" olarak değerlendirilmiştir. Öğrencilerin açıklamaları ve çözümleri bilimsel olarak doğru ise doğru olarak kodlanırken, açıklamaları doğru fakat yetersiz veya işlemsel hatalar varsa kısmen doğru olarak, açıklamalar yetersiz veya yok ise yanlış olarak kodlanmıştır.

Tablo 3

Temsil Çeşitleri ve Alt kategorilerine Göre Muhtemel Öğrenci Düşünüşleri

Temsil Çeşitleri	Kodlar ve Alt Kodlar	Örnek Öğrenci Cevapları
Geometrik oran (Görev 1)	Üçgen Modeli Durağan	Diklik Yükseklik artınca merdiven daha dik olur Yükseklik artarsa oran $6/8$ olur bu da $5/8$ 'den büyüktür artar.
	Üçgen Modeli Dinamik	Üçgenler çizersek örneğin 2. ve 4. basamak yine oran değişmez veya Dikey veya yatay uzunluk artması aynı oranda olursa değişmez.
	Geometrik oran (Değişim)	Birim yataydaki mesafe dikeyde 10 br'lik mesafeye karşılık gelir.
Fiziksel Özellik (Görev 2)	Diklik	Diklik azaldığı için suyun akış hızı azalmış denilebilir.
	Değişim oranı	Grafik üzerinde birim x'teki değişikliğe bakınca suyun yüksekliğindeki değişim daha fazla olmuştur.
Fonksiyonel özellik (Görev 3 & 4)	Değişim oranı	Birim zamandaki uzama miktarı 7' dir
	Doğrusal sabit	İlişki doğrusal olduğu için akış hızı değişmez.

*Bu kod bu çalışmada görülmediği için örnek öğrenci cevabı yazarlar tarafından oluşturulmuştur.

Açık uçlu görevlere ilişkin öğrenci cevapları kodlandıktan sonra dört öğrenci ile yapılan görüşmeler çözümlenmiştir. Daha sonra, Moore-Russo vd. 'nin (2011) ortaya koyduğu eğitim temsillerine ve bu temsillerin birbiri ile ilişkisine (Nagle, v.d., 2019) göre öğrencilerin eğitim kavrayışları analiz edilmiştir. Temelde öğrenci düşünüşleri geometrik ve cebirsel oran, fiziksel özellik, fonksiyonel özellik temsilleri

açısından ele alınmıştır (Bakınız: Tablo 3). Her bir göreve ilişkin dört öğrencinin düşünceleri bu kategoriler çerçevesinde ele alınıp kodlar ana kategorinin temsil ettiği öğrenci düşüncülerinden ve öğrenci cevaplarından oluşturulmuştur. Örneğin, geometrik oran temsiline ilişkin kategori, dinamik veya durağan üçgen modelleri veya geometrik oran ile fonksiyonel özellik temsili ile ilişkili olan geometrik değişim oran kodlarını içermiştir. Veri analizinin inandırıcılığını sağlamak adına yazarlardan birinin beş öğrencinin açık uçlu görevlere ilişkin cevapları hazırlanan değerlendirme ölçütüne göre değerlendirmesi ve bir öğrencinin görüşmesinin yazılı halini kodlaması istenmiştir. Kodlayıcılar arası güvenilirlik Miles ve Huberman'ın (1994) güvenilirlik formülü kullanılarak belirlenmiştir. Buna göre, analizler arasındaki uyum yüzde 91 olarak bulunmuştur.

Bulgular

Öğrencilerin her bir göreve ilişkin yukarıda belirtilen kategoriler çerçevesindeki performansları, temsil çeşitlerini anlamlandırma süreçleri ve bu temsiller arası ilişkiyi nasıl kurdukları aşağıda sunulmuştur.

Birinci Görev

Tablo 4

Birinci Göreve İlişkin Öğrencilerin Performansı

Kategoriler	Kodlar	Doğru Kişi sayısı (%)	Kısmen Doğru Kişi sayısı (%)	Yanlış veya Boş Kişi sayısı (%)	Toplam Kişi sayısı (%)
1. Birim oranın bulunması ve ilişkilendirilmesi	1.1. Geometrik oranı hesaplama	99 (63)	47 (30)	12 (7)	158 (100)
	1.2. Geometrik oran (durağan üçgen modeli)	76 (48)	40 (25)	37 (31)	158 (100)
	1.3. Geometrik oran (dinamik üçgen modelleri)	32 (19)	90 (57)	36 (23)	158 (100)
2. Eğim kavramı ile bağdaştırma	2.1. Kavram	61 (36)	49 (29)	48 (35)	158 (100)

Tablo 4'te görüldüğü üzere, öğrencilerin çoğunluğu (%63) merdivenin basamaklarının yükseklik ve derinliklerini ve bunların birbirine oranını doğru olarak hesaplayabilmiştir. Öğrencilerin doğru olarak doldurdukları tablo örneği Şekil 4'te verilmiştir. Kısmen doğru olarak kodlanan öğrencilerin (%30) ise değerlerin aynı çıktığını belirtip ek açıklama yapmadıkları görülmüştür. Yanlış olarak kodlanan öğrenci cevaplarına göz atıldığında ise; yükseklik ile derinliğe ait uzunlukların birbirine oranlarının yerine farklarının alındığı saptanmıştır. Bu öğrenciler, farkın her basamakta değiştiğinden dolayı birim oranın değişeceğini belirtmişlerdir.

Farklı basamaklardaki oranlar karşılaştırılmasına ilişkin öğrenci cevapları incelendiğinde, oranın sabit kaldığını ifade edip; bunu derinlik ve yüksekliğin belli bir oranda arttığı için değişmediğini dinamik üçgenler çizerek açıklayanların yüzdesi 19'dur. Öğrencilerin yarıya yakınının ise (%57) "oran değişmez" şeklinde genel bir açıklama yapıp; düşüncelerini desteklemedikleri görülmüştür.

	Yükseklği (cm)	Derinliği (cm)	Yükseklğin derinliğe oranı
İlk dört basamağın	80	128	$\frac{80}{128} = \frac{5}{8}$
İlk üç basamağın	60	96	$\frac{60}{96} = \frac{5}{8}$
İlk iki basamağın	40	64	$\frac{40}{64} = \frac{5}{8}$
İlk basamağın	20	32	$\frac{20}{32} = \frac{5}{8}$

Şekil 4. Birim oranı hesaplayabilme

Öğrencilerin yaklaşık olarak yarısı (%48) diklik ile basamak yüksekliği-derinliği arasındaki ilişkiyi orandan yola çıkarak doğru açıklayabilmıştır. Bu ilişkiyi açıklamak için bazı öğrenciler dik üçgenler çizip, yeni birim oranı (dik üçgendeki dikey/yatay) belirtmişler ve eski oran ile kıyaslama yapıp doğru cevaplamışlardır. Bazıları ise yüksekliğin artmasının merdiveni daha dik yapacağından oranın artacağını (fiziksel özellik; merdivenler çizip kıyaslayarak) belirtmişlerdir. Kısmen doğru olarak kodlanan öğrenci cevaplarının %92'sinde ise, yükseklik arttığında dikliğin artacağı belirtilirken yatay uzunluğun değişmesinin eğimi etkilemeyeceğine veya arttıracağına yönelik ifadeler görülmüştür. Yanlış yapan öğrenciler ise, "yükseklik ve derinlik aynı anda artarsa oranın da artacağını çünkü, pay ve paydanın sayısal olarak arttığını" belirtmişlerdir. Görüşmede, Ö23 dışındaki öğrenciler durağan üçgen modelleri üzerinde, eğimin yükseklik ve derinliğe bağlı olarak değişimini gösterebilmişlerdir. Ayrıca Ö4 ve Ö52 oranın değişmeme durumunu dinamik üçgen modelleri üzerinde belli bir oranda artış olması ile ilişkilendirerek açıklayabilmışlerdir.

Böylece, görüşme yapılan dört öğrencinin, bulduğu oranı açıklarken geometrik oran (dikey mesafe/yatay mesafe) temsiline uygun ifadeler kullanabildikleri görülmüştür. Üç öğrencinin ise geometrik oran ve fiziksel özellik temsili arasındaki ilişkiyi açıklayabildikleri saptanmıştır. Ayrıca, öğrencilere geometrik ve fonksiyonel temsilleri arasındaki ilişkinin incelenmesi adına buldukları oranın ne anlama geldiği sorulmuş; geometrik oran (değişim oranı) temsiline uygun olarak açıklama yapamadıkları görülmüştür. Bu durum Ö4'ün (orta) görüşme verisinden bir kesit ile aşağıda verilmiştir.

G: Bulduğun 5/8 oranı ne ifade ediyor?

Ö4: Yüksekliğin derinliğe bölümü

G: Başka ne demek? Koordinat sistemi üzerinde bu oranı nasıl ifade edersin?

Ö4: Doğrusal çizgi olur, üçgen çizersem karşı 5 bölü yatay 8; 5/8 olur.

Görüşmeci: Başka?

Ö4:yok..

G: Tamam peki, neden derinliği yüksekliğe bölüp bulmuyorum?

Ö4: O zaman daha fazla çıkar

G: Evet 8/5 olur

Ö4: O zaman saçma olur; yani normal bir eğim olmaz düz bir çizgi olmaz.

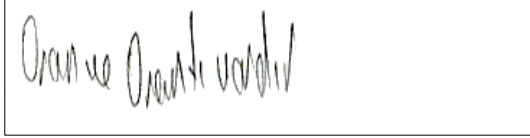
G: Ne demek istedin biraz daha açıklar mısın; 8/5 gibi bir oran olamaz mı?

Ö4: Evet olamaz.

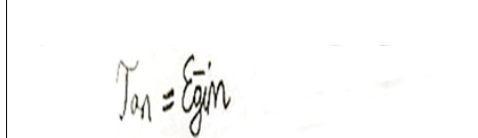
Yukarıda sunulan veri setinde, Ö4'ün bulduğu oranı fiziksel özellik ve geometrik oran olarak anlamlandırabilse de geometrik oranı fonksiyonel özellik

temsiliyle ilişkilendiremediği ve kullandığı dikey bölü yatay bilgisini açıklayamadığı görülmüştür.

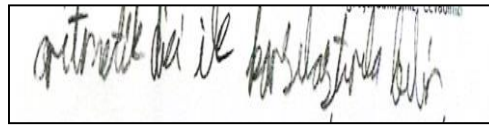
Aynı zamanda, katılımcıların %50'den fazlası buldukları oranın, oran-orantı, doğrusal denklemler, kesir, rasyonel sayılar aritmetik dizi, tanjant kavramı ile ilgili olduğunu dile getirmiş (Şekil 5 ve 7) ancak yaklaşık üçte biri eğim kavramı ile buldukları oranı bağdaştırabilmiştir (Şekil 6).



Şekil 5. Oran Orantı



Şekil 6. Eğim



Şekil 7. Aritmetik Dizi

İkinci Görev

Tablo 5'te ise, su ile doldurulan bir akvaryumda, zaman ve akvaryumdaki suyun yüksekliğine ilişkin sorulara verilen cevapların analizi sunulmuştur.

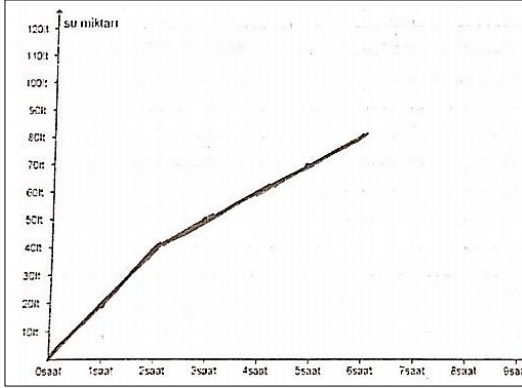
Tablo 5

İkinci Göreve İlişkin Öğrencilerin Performansı

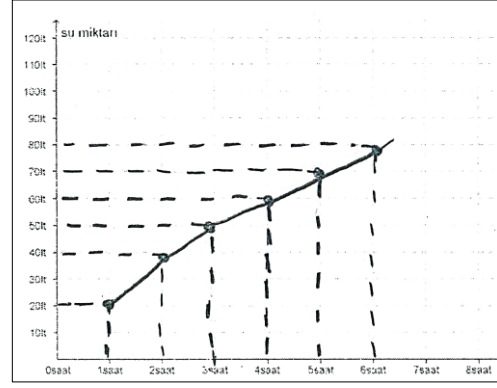
Kategoriler	Kodlar	Doğru Kişi sayısı (%)	Kısmen Doğru Kişi sayısı (%)	Yanlış veya Boş Kişi sayısı (%)	Toplam Kişi sayısı (%)
1.Grafik Çizimi	1.1.Kovaryasyonel Düşünme Seviyeleri	75 (47)	26 (16)	57 (37)	158 (100)
	2.1.Verilen durumdaki oranların karşılaştırılması (fonksiyonel özellik)	68 (43)	87 (55)	3 (2)	158 (100)
2.Birim oranın bulunması ve ilişkilendirilmesi	2.2.Birim oran değişmezliği (doğrusal sabit)	29 (18)	24 (15)	105 (66)	158 (100)
	3.1.Kavram	3 (2)	99 (63)	56 (35)	158 (100)
3.Eğim kavramı ile bağdaştırma					

Tablo 5'te görüldüğü üzere, öğrencilerin %47'si problem durumunu anlayıp, grafiği doğru bir şekilde çizebilmiştir (Şekil 8). Doğru olarak kodlanan öğrencilerin kovaryasyonel akıl yürütme seviyelerinden değerleri koordine edebilme ve parçalı sürekli kovaryasyon seviyelerinde olduğu söylenebilir. Çünkü çoğunun grafiğinde noktaları birbirine doğru parçaları veya bir doğru ile birleştirdikleri ve grafiği orijinden başlatmadıkları görülmüştür (Şekil 9) Öğrenci çizimlerinden, kesintisiz

sürekli kovaryasyon seviyesinde olup olmadıkları belirlenemediği için görüşmelere katılan öğrencilerden çizimleri hakkında detaylı bilgi alınmıştır.



Şekil 8. Doğru öğrenci cevabı



Şekil 9. Kısmen doğru öğrenci cevabı

Bu doğrultuda, öğrencilerin grafiği çizme süreçlerine göz atıldığında; Ö52 bir noktayı belirleyip o noktadan sonra her birim saatte belli oranda doğrusallığı devam ettirerek grafiğini çizdiğini belirtirken (parçalı sürekli kovaryasyon), diğer öğrenciler ise, tablodaki değerleri kullanarak noktaları koordinat üzerinde belirlediklerini daha sonra bu noktalardan doğrusal çizgi geçecek şekilde grafiği oluşturduklarını (değerleri koordine etme) belirtmişlerdir. Kısmen doğru olarak kodlanan cevaplarda ise öğrencilerin noktaları eksiksiz belirledikleri ancak grafiğin sürekli olmasına rağmen değişkenleri kesikli şekilde gösterdikleri saptanmıştır. Bu nedenle, öğrencilerin sadece noktaları belirledikleri ve değişkenlerin birbiri ile olan ilişkisi ve özelliğini irdelemeden grafikleri çizdikleri (değerleri koordine etme) görülmüştür. Ayrıca, öğrencilerin kovaryasyonel akıl yürütme becerileri, görüşmedeki alt sorularla temsil çeşitlerine bağlı kalınarak aşağıda irdelenmiştir.

Diğer bir kod olan “oranların karşılaştırılması”nda doğru olarak kodlanan öğrenci cevaplarında (%43), öğrencilerin akvaryumdaki suyun akış hızını, birim saatte akan su miktarlarını kıyaslayarak açıklama yaptıkları görülmüştür. Bu durum öğrencilerin birim zamanda akan su miktarını birim oranla ilişkilendirebildiklerini göstermiştir. Bu nedenle doğru olarak kodlanan öğrenci cevaplarından parçalı sürekli kovaryasyon seviyesinde oldukları çıkarımı yapılabilir. Cevapları, kısmen doğru olarak kodlanan öğrenciler (%55) ise kıyaslamayı, musluk sayısının artmasına bağlı olarak akan su miktarındaki değişime göre yapmıştır (kabaca koordine etme). Böylece öğrencilerin grafik çizimindeki kovaryasyon becerileri ile eğimin fonksiyonel özellik temsili ile ilgili düşüncülerinin benzer olduğu görülmüştür.

Ayrıca, öğrencilerin geometrik-cebirselsel oran temsilleri arasındaki geçişi nasıl düşündüklerini belirlemek adına; “Grafikten yola çıkarak birim oran nasıl bulunur” sorusu sorulduğunda, dört öğrenciden üçü geometriksel ve cebirselsel oran temsili arasındaki ilişkiyi gösterebilmiştir. Buna ilişkin araştırmacı ile öğrenci (orta üstü) arasındaki diyalog aşağıda sunulmuştur.

G: Peki bir hortumla dolduğundaki zamana bağlı su değişimi için cebirselsel ifaden ne olur?

Ö52: $10x$

G: Bu denklemde 10 ne demek?

Ö52: Bir saatte akan su miktarı

G: Çizdiğin grafiğe bakarak bulduğün oranı nasıl bulursun?

Ö52: [Grafik üzerinde üçgen çizerek] 40 litre su akmış (y_2-y_1 dikey uzaklığı bularak) 4 saatte (x_2-x_1 yatay mesafeyi çizerek)...Bu durumda 10 olur bir saatte akan su miktarıdır.

Yukarıdaki görüşme verisinde de görüldüğü üzere, Ö52 değişim oranını bu soru için cebirsel olarak ifade edebilirken, temel düzeyde geometrik oran olarak (üçgen modeli-durağan) da ifade edebilmiştir.

Açık uçlu sorularda öğrencilere eğimin fonksiyonel özellik-doğrusal sabit temsiline ilişkin bilgilerini ölçmek için 3. ve 6. saat aralığında su miktarı-zaman değişimi arasındaki oran sorulmuş ancak öğrencilerin sadece %18'si soruyu doğru yanıtlamıştır. Şekil 10'da görüldüğü üzere; bazı öğrencilerin suyun akış hızını su miktarlarının birbirine oranı olarak algıladıkları fakat ölçüm olarak eğimi algılayamadıkları sonucuna ulaşılabilir.

f) 3. ve 6. saat aralığında su miktarı-zaman değişimi arasındaki oranı kactır?

$$\begin{array}{l} 3 \text{ saatte} = 50 \\ 6 \text{ saatte} = 80 \end{array} \quad \frac{50}{80} = \frac{10}{16}$$

Şekil 10. Yanlış olarak kodlanan öğrenci cevabı

Orta üstü öğrenci birim oranın 3. ve 6. Saatte değişmediğini belirtip işlem yapmadan 10 olarak söyleyebilmiştir. Fakat, orta seviyede olan öğrencilerin oranın sabit kaldığını ancak geometrik veya cebirsel oran temsiline kullanarak açıklamaları dikkat çekmektedir. Eğimin değişmediği durumda cebirsel ile geometrik oran anlamı arasındaki ilişki sorgulandığında öğrenci düşüncüsü aşağıda verilmiştir.

G: Değişim oranı ne demek?

Ö2: Suyun akma hızı, saate düşen sudaki artış. Böyle açıkladığınızda denklem geliyor 10 10 artıyor her zaman, bunda aynı oluyor.

G: Bu soru için havuzun yeterince büyük olduğunu düşünsen 3-6 ve 8-9 zaman aralıklarında sudaki değişim oranı aynı mıdır?

Ö2: Grafikten mi bakayım?

G: Evet bakabilirsin

Ö2: 3-6 zaman aralığında (grafikte y_2-y_1 hesapladı daha sonra 4'e böldü)...10 olur. [8-9 için] 10 bölü 1; yine 10 olur. Aynı çıktı değişmedi.

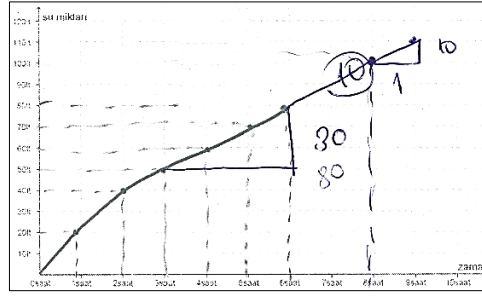
G: Eğim bu durum için ne demek?

Ö2: Su miktarı farkının zaman miktarına bölmek demek

G: Başka türlü ifade edebilir misin?

Ö2: Bu bir oran.

Bu örnek ile birlikte, öğrencinin geometrik oranı hesaplayabilmesine rağmen değişim oranının sabit kaldığını kavrayamadığı görülmektedir. Diğer deyişle, öğrenci geometrik orandan fonksiyonel özelliğe geçişi sağlayamadığı için dinamik bir dikey/yatay üçgen modeli (Şekil 11) kullanmasına rağmen oranın değişmeyeceğini işlem yapmadan söyleyememiştir.



Şekil 11. Ö2'nin Dikey/ Yatay üçgen gösterimi

Ö2'ye ve eğimin aynı kaldığını belirleyemeyen iki öğrenciye, değişim oranları verilmediği düşünüldüğünde çizdikleri grafiğe bakarak nasıl bir çıkarım yapacakları sorulmuştur. Ö2 "ikinci aşamada (3. Saatten sonra) doğrunun x eksenine daha yakın olacağından değişim oranının daha az olacağı" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Diğer iki öğrenci ise "ikinci durumda grafiğin dikliği azalmış bundan dolayı değişim azalır" şeklinde genel olarak eğimin fiziksel özellik temsiline uygun açıklama yaparken geometrik oran ve fonksiyonel özellik temsillerine göre ifade etmekte zorlanmıştır. Genel olarak, öğrencilerin temeldeki değişim oranını anlamlandırırken parçalı sürekli kovaryasyon şeklinde düşündükleri söylenebilir. Bir diğer bulgu ise, öğrencilerin çok azının (%2) bu soru için değişim oranını eğim kavramı ile bağdaştırdıklarını göstermiştir.

Üçüncü Görev

Tablo 6' da boy uzunluğunun zamana göre değişimini içeren göreve verilen cevapların analizi sunulmuştur.

Tablo 6

Üçüncü Göreve ilişkin Öğrenci Cevapları

Kategoriler	Kodlar	Doğru Kişi sayısı (%)	Kısmen doğru Kişi sayısı (%)	Yanlış veya Boş Kişi sayısı (%)	Toplam Kişi sayısı (%)
1.Grafik Çizimi	1.1.Kovaryasyonel Düşünme Seviyeleri	50 (32)	56 (35)	52 (33)	158 (100)
	2.1.Birim Oran Hesaplanması (Cebirsel Oran)	119 (75)	10 (6)	29 (18)	158 (100)
2.Birim oranın bulunması ve ilişkilendirilmesi	2.2.Birim Oran değişmezliği (Doğrusal Sabit)	78 (49)	0	80 (51)	158 (100)
	3.1.Cebirsel İfade (Fonksiyonel Özellik)	20 (14)	82 (52)	56 (34)	158 (100)
3.Cebirsel Gösterim					
4.Eğim kavramı ile bağdaştırma	4.1.Kavram	3 (2)	86 (54)	69 (44)	158 (100)

Veri analizi, öğrencilerin yaklaşık üçte birinin (%32) verilen problem durumuna ait grafiği doğru bir şekilde çizebilirken, %33'ünün grafik çizimini

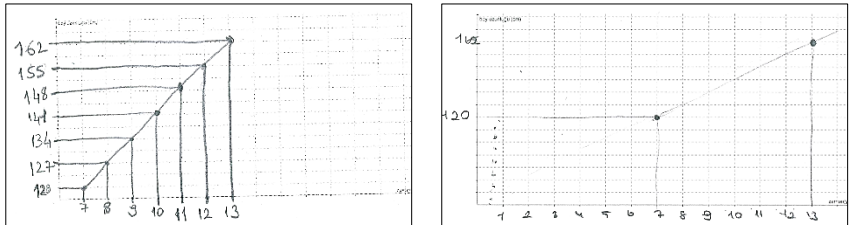
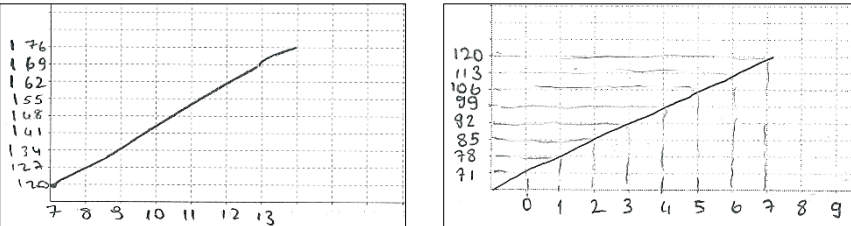
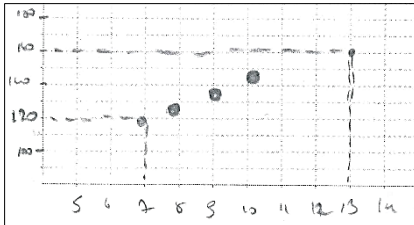
tamamlayamamış olduğunu ya da eksik çizdiğini göstermiştir. Örnek doğru, kısmen doğru ve yanlış öğrenci çizimleri Tablo 7’de sunulmuştur.

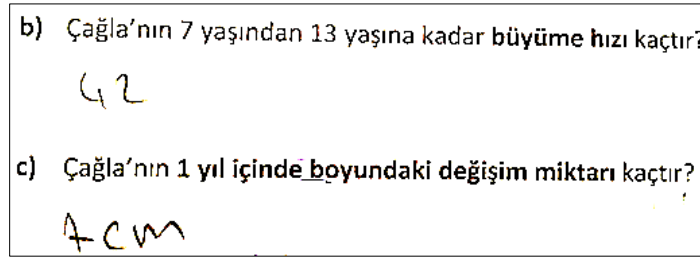
Öğrencilerin kısmen doğru ve doğru çizimlerinde eğimi anlamlandırabilirken, y kesişiminin gösteriminde sıkıntı yaşadıkları görülmektedir. Ayrıca doğru olarak kodlanan cevapların %30’u verilen noktaların doğru ile birleştirerek çizilen grafikten oluştuğu (değerleri koordine etme) saptanmıştır.

Katılımcıların %75’i cebirsel oran temsiline göre birim oranı doğru olarak hesaplayabilmiş ve açıklayabilmiştir. Fakat, öğrencilerin % 51’i birim oranı (bir yıl içindeki boydaki değişim miktarı) 7 olarak doğru bulabilirken, büyüme hızı sorgulandığında sadece boy farkını almış, boy farkını yaş farkına oranlayamamıştır (Şekil 12). Bu öğrenciler, büyüme hızı ile bir yıl içindeki boydaki değişim miktarının aynı olduğunu görememiş, diğer bir deyişle oranın sabit olduğunu farkedememişlerdir (Doğrusal sabit ve fonksiyonel özellik temsili).

Tablo 7

Üçüncü Göreve İlişkin Örnek Öğrenci Cevapları

Grafik-Kodlama	Örnek Öğrenci Çizimleri
Doğru Çizim	
Kısmen Doğru Çizim	
Yanlış Çizim	



Şekil 12. Yanlış kodlanan öğrenci cevabı (Birim oran değişmezliği)

Açık uçlu görevlerde öğrencilerin verdiği cevaplara paralel bir şekilde görüşmelerde de orta altı öğrenci (Ö23) dışındaki öğrencilerin, birim oran değişmezliğini açıklayabildikleri görülmüştür. Grafik üzerinde göstermeleri istenildiğinde ise grafiğini, verilen noktaları birleştirerek oluşturan öğrencinin (Ö23) birim zamandaki boydaki artışı gösteremediği; ancak grafiğini birim oranı düşünerek çizen öğrencilerin (örn., Ö52) fonksiyonel özellik temsilini koordinat üzerinde daha kolay açıklayabildikleri görülmüştür.

Cebirsel oran temsiline uygun olarak, öğrencilerin %14'ü duruma ilişkin denklemi yazabilmiştir. Kısmen doğru olarak kodlanan öğrencilerin denklemde eğimi parametrik katsayı temsiline uygun olarak gösterebilmelerine rağmen y-kesişimini doğru yazamadıkları saptanmıştır. Denklemde eğimi doğru olarak gösterebilen öğrencilerin ayrıca grafiği x'teki bir birimlik artışın y'deki 7 birim artış olacak şekilde çizdikleri (parçalı sürekli kovaryasyon) saptanmıştır.

İkinci göreve benzer şekilde, öğrencilerin çok azı (%2) büyüme hızını eğim kavramıyla bağdaştırabilirken, çoğu öğrenci doğru orantı, denklemler, aritmetik ortalama ve histogram gibi konu ve kavramlarla ilişkilendirebilmiştir.

Dördüncü Görev

Tablo 8'de adım sayısı ile kare sayısı ilişkisi sorulan 4. soruya verilen cevapların analizi sunulmuştur.

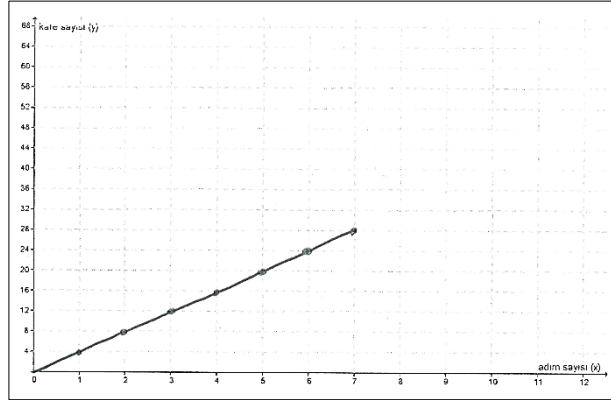
Tablo 8

Dördüncü Göreve İlişkin Öğrenci Cevapları

Kategoriler	Kodlar	Doğru Kişi sayısı (%)	Kısmen doğru Kişi sayısı (%)	Yanlış veya Boş Kişi sayısı (%)	Toplam Kişi sayısı (%)
1.Grafik Çizimi	1.1.Kovaryasyonel Düşünme Seviyeleri	26 (16)	105 (66)	27 (17)	158 (100)
	2.1. Birim Oran				
2.Birim oranın bulunması ve ilişkilendirilmesi	Hesaplanması (Cebirsel Oran)	136 (86)	10 (6)	12 (8)	158 (100)
	2.2.Parametrik Katsayı	105 (66)	5 (3)	48 (30)	158 (100)
3.Eğim kavramı ile bağdaştırma	3.1.Kavram	2 (1)	98 (62)	58 (37)	158 (100)

Katılımcıların çoğunluğu (%66) grafiği kısmen doğru olarak çizmiş ve %86'sı birim oranı hesaplayabilmiştir. Öğrencilerin çoğunun, değişkenin kesikli olmasına rağmen sürekli çizmelerinden dolayı kısmen doğru cevapların oranı yüksek

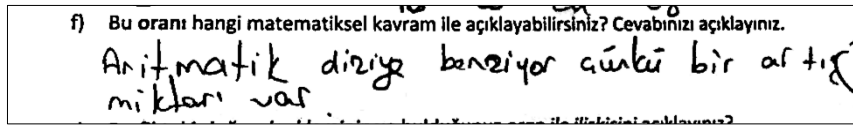
bulunmuştur. Bu bulgu ile öğrencilerin grafik çizimlerinde değişkenlerin özelliklerini dikkate almadıkları söylenebilir.



Şekil 13. Kısmen doğru öğrenci çizimi

Cebirsel oran ile fonksiyonel özellik arasındaki ilişkiyi kurup kuramadıklarını anlamak için ise öğrencilerin oluşturdukları denkleme ve açıklamalarına bakılmıştır. Buna göre, Tablo 7'ye bakıldığında; öğrencilerin çoğunluğunun (%66) denklemi kurabildiği görülmektedir. Doğru olarak kodlanan öğrenci cevapları incelendiğinde ise, doğru denklemi ($y=mx$) ile birim oran arasındaki ilişkiyi öğrencilerin %70'i x 'in katsayısı (parametrik katsayı) olarak açıklamış; %30'a yakını ise doğru orantılıdır şeklinde cevap vermiştir. Bu nedenle öğrencilerin parametrik katsayı temsiline ilişkin yeterli bilgiye sahip olduğu söylenebilir.

Öğrencilerin çok azı (%1), kare sayısındaki artış oranını eğim kavramı ile bağdaştırabilmiştir. Öğrencilerin birçoğu, sorudaki birim oranı Ö23'ün cevabından da görüldüğü üzere aritmetik dizi, denklem, grafik, oran-orantı, geometrik dizi, örüntü veya fraktal kavramları ile tanımlamaya çalışmıştır.



Şekil 14. Ö23'ün cevabı (Oranı Aritmetik Dizi Konusu ile Bağdaştırma)

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışma, gerçek yaşam durumları içeren problemler verildiğinde 8. Sınıf öğrencilerinin durumları grafik üzerinde gösterme performanslarını, eğim kavramının temelindeki birim oranı veya değişim oranını farklı temsilleriyle (geometrik ve cebirsel oran, fonksiyonel özellik) nasıl kavradıklarını ve farklı eğim temsilleri arasında bağlantılar oluşturabilme becerilerini incelemiştir. Çalışma bulgularında, verilen durumu grafiğe doğru aktarabilen öğrenci yüzdesi problem durumlarına göre farklılık göstermiş olup öğrencilerin günlük yaşam durumlarını grafiğe aktaramadıkları görülmüştür. Öğrencilerin, eksenleri boş bırakılan koordinat sisteminde (Görev 3), eksenlere sayısal değerler verilen koordinat sistemine (Görev 2) kıyasla, durumun grafiğini çizmede daha fazla zorlandıkları görülmüştür. Üçüncü görevin, ikinci göreve kıyasla, eğimle birlikte y -kesişimi içermesinden dolayı verilen durumu grafiğe doğru aktarabilme oranının düştüğü söylenebilir. Bu nedenle,

öğrencilerin grafikte eğimi anlamlandırmalarına rağmen y-kesişimini gösterirken daha fazla zorluk çektikleri söylenebilir. Bu bulgu Hattikudur vd.'nin (2012) çalışma bulgusu ile de paralellik göstermektedir. Bu bulguya ek olarak, 4. Görevin ve 2. Görevin doğaları gereği y kesişimi içermemesine karşın, daha fazla öğrenci 4. Görevde doğruyu orjinden geçecek şekilde denklemin grafiğini sürekli çizebilmiştir. Bu bulgu, öğrencilerin y-kesişiminin gösteriminde verilen duruma ilişkin "musluklar açılmadan önce depoda su olabilir" veya "sıfırncı adımda kare sayısı da sıfırdır" (Hattikudur vd., 2012) gibi genellemeler yaptıklarını işaret edebilir.

Grafik çizimi ve anlamlandırılması ile ilgili dikkat çeken diğeri bir bulgu ise, öğrencilerin çoğunluğunun grafiği, noktaları belirledikten sonra doğruyu bu noktalardan geçirerek çizmiş olmalarıdır. Böylece, öğrencilerin grafiği çizerken kovaryasyonel düşünme seviyelerinin parçalı sürekli kovaryasyon seviyesi ve altı olduğu söylenebilir. Bu bulgu, öğrencilerin grafik çizimlerini işlevsel (operative) olarak görmeksizin sembolik (figurative) olarak gördüklerine işaret edebilir (Moore, Stevens, Paoletti, Hobson ve Liang, 2019). Bu nedenle, öğrenciler diğeri alt soruları veya görüşmede sorgulanan temsil çeşitlerinden olan doğrusal sabit, cebirsel oran, fonksiyonel özellik veya geometrik oranı grafikte bağdaştıramamış olabilirler. Bu eksiklik, diğeri çalışmaların bulguları ile örtüşmektedir (Birgin 2012; Dolores-Flores, Rivera-López ve García-García, 2019; ; Hattikudur vd., 2012; Lobato, Ellis ve Muñoz, 2003). Buna gerekçe olarak, öğrencilerin grafik gösterimini de sembolik gösterimlerde olduğu gibi ezber düzeyde kavradığı veya grafik gösterimine önem vermediği söylenebilir. Bu nedenle, derslerde geometrik oran ile fonksiyonel özellik temsili arasında ilişki vurgulanmalıdır.

Çalışmanın bir parçası olan *birim oran/değişim oranı'nın* hesaplanmasına yönelik üç göreve (Görev 1, 3 ve 4) verilen cevaplar incelendiğinde, öğrencilerin yaklaşık en az yüzde 60'ının birim oranı sayısal olarak hesaplayabildikleri saptanmıştır. Bu nedenle, durağan ve dinamik sözel durumlarda öğrencilerin eğimi cebirsel oran ve geometrik oran olarak göstermede/hesaplama zorluk çekmedikleri söylenebilir. Diğeri yandan, birim oranın anlamını ifade edebilme ve diğeri temsil çeşitleri arasında ilişkiyi kurmada öğrencilerin zorluk çektiği belirtilmektedir (örn., Lobato ve Siebert, 2002).

Bu zorlukları belirlemek adına, öğrencilerin birim oranı oluşturan değişkenler arası ve eğimin farklı temsilleri arası kurdukları ilişki irdelenmiştir. Eğitim temsillerinden biri olan *geometrik oran* temsiline göre öğrencilerin birinci göreve verdikleri cevaplar incelenmiştir. Öğrencilerin (durağan durumlarda) %45'inin dikey mesafenin yatay mesafeye oranını incelerken, diklik ile değişkenler arasındaki ilişkiyi anlamlandırabildikleri gözlemlenmiştir. Kısmen doğru cevaplayan öğrencilerin yüzde 90'a yakınının dikey mesafe değiştiğinde oranın değiştiğini anlamlandırabilirken yatay mesafe değiştiğinde orana etkisini anlamlandırmakta zorluk çektiği görülmüştür. Bu bulgu diğeri çalışmalarla da desteklenmektedir (Deniz ve Uygur-Kabael, 2017; Planinic vd., 2012). Bu durum, öğrencilerin birim oranın her bir basamak için aynı olduğunu görmelerine rağmen, artışların birbiri ile olan ilişkisini anlamlandırmakta zorluk çektiklerini ve dikliği tek bir değişken olan yükseklikle bağdaştırabildiklerini göstermektedir. Geometrik oranı diğeri temsil çeşitlerine ne derece bağlayabildiklerini saptamak adına görüşmede öğrencilere bulunan oranın koordinat düzleminde anlamı sorulmuştur. Görüşmeye katılan

öğrencilerin hiçbirinin geometrik oran temsili fonksiyonel özellik temsili ile birleştirip değişim üzerine yorum yapamadığı gözlemlenmiştir. Bu bulgu, Reiken'in (2008) vurguladığı gibi, öğrencilerin eğimi prosedürel şekilde sayı olarak kavrayışları ile ilgili olabilir. Diğer yandan, görüşülen öğrencilerin dinamik durumlardaki geometrik oran ile fonksiyonel özelliği temsillerini daha kolay anlamlandırabildikleri gözlemlenmiştir. Stump'ın (2001b) çalışma bulguları doğrultusunda bu durumun; öğrencilerin, dinamik durumlarda, doğrunun eğimini yorumlarken; fonksiyonel özellik temsili temelinde anlamlandırması ile ilişkili olduğu söylenebilir. Bu nedenle, durağan durumlarda geometrik oran ile fonksiyonel özellik temsilleri arasındaki ilişkinin oluşturabilmesi için uygun görevlerin sınıf-içi tartışmalarında kullanılması gerekliliği görülmektedir.

Eğimin diğer bir temsili olan *doğrusal sabit* açısından görevlere (Görev 2 ve 3) verilen cevaplar incelendiğinde ise, öğrencilerin bir kısmının cebirsel oran bilgilerini kullanarak veya oranın sabit olduğunu belirterek oranın değişmezliği hakkında doğru cevaplar verdikleri görülmüştür. Örneğin, doğruyu noktaları birleştirmenin ötesinde değişim oranı kadar ilerleterek grafiği tamamlamış olan (kesikli sürekli kovaryasyon) öğrenci Ö52 sabit değişim oranı vurgusunu yapabirmiştir. Bu durum bazı öğrencilerin birden fazla temsil veya gösterim arası geçişi yapabildiklerini göstermektedir. Çalışmanın dikkat çeken diğer bulgusu ise, boy uzunluğu ile zaman arasındaki ilişkinin sunulduğu görevde (Görev 2), öğrencilerin yaklaşık yarısının birim oranın değişmediğini ifade edebilirken, dinamik olarak verilen diğer durumda (Görev 3) öğrencilerin sadece %20'sinin bu cevabı vermesidir. Bunun sebebi, suyun akış hızının belli bir zaman aralığından sonra değişiyor olmasının öğrencilere karmaşık gelmesi veya öğrencilerin büyüme hızı bağlamına aşına olmaları olabilir. Bu nedenle, derslerde sunulan içerikteki değişkenlerin sürekli değiştirilmesi öğrencilerin değişen duruma göre eğimi irdelemesine olanak sağlaması açısından önemlidir. Çünkü birim oran ile eğim arasındaki ilişkinin sorgulanması ve birim oranın bağlam içerisinde yorumlanması, öğrencilerin eğimi sadece matematiksel olarak hesaplamalarını istemekten daha önemlidir (Teuscher ve Reys, 2010).

Eğimin *fiziksel özellik* anlamı ile ilişkili olarak; öğrencilerden 2. Görevde değişim oranının değerinin sayısal olarak verilmediğini düşündüklerinde grafiği yorumlamaları istenmiş ve ilk duruma göre bir musluk daha eklendiğinde grafiğin nasıl değişeceği sorulmuştur. Grafiği doğru çizen iki öğrenci "varile gelen su miktarı artacağından grafiğin daha dikleşeceği" veya "her bir birimde (x 'teki değişiklik) y deki değerin daha fazla yükseldiği görüldüğü için doğrunun dik olması gerektiği" şeklinde açıklamalarda bulunmuşlardır. Grafiği doğru çizmelerine rağmen diğer iki öğrencinin ise doğrunun dikliği ile suyun akış hızı arasında bağlantıyı yüzeysel veya yanlış kurdukları gözlemlenmiştir. Bu nedenle, öğrencilerden sayısal değerlerin verilmediği durumlarda eğimin fiziksel özellik temsiline uygun olarak grafiği çizmeleri veya anlamlandırmaları istendiğinde zorlandıkları söylenebilir (Hattikudur vd., 2012).

Son olarak, eğimin *geometrik, cebirsel oran ve fonksiyonel özellik* temsilleri açısından öğrenci düşünceleri değerlendirildiğinde; Görev 3'e verilen cevaplarda, öğrencilerin bir kısmının herhangi bir yaştaki boy uzunluğunu bulmak için denklem kurduğu görülmüştür. Denklemi doğru kuran öğrencilerin grafiği çizerken geometrik oran, doğrusal sabit veya fonksiyonel özellik temsillerinden faydalandıkları

söylenbilir. Fakat Cho ve Nagle'nin (2017) çalışmasına paralel olarak, cebirsel ve geometrik oran temsillerini kullanabilen öğrencilerin yüzde 35'inin eğimi "büyüme hızı" (fonksiyonel özellik) ile ilişkilendiremedikleri görülmüştür. Bu da, temsiller arası geçişte öğrencilerin zorlandıklarını göstermektedir.

Tüm bunlara ek olarak, Merdiven Basamağı bağlamında (Görev 1), beklenildiği üzere daha fazla öğrenci buldukları oranı, eğitim kavramı ile ilişkilendirebilmiştir. Bunun nedeni, merdivenin doğruyu veya dikliği çağrıştırması ve bu sayede öğrencilerin üçgen çizerek (bilişsel araç) eğimi kolayca anlamlandırabilmeleri olabilir. Ayrıca, bu bulgu öğrencilerin eğime dair sezgisel veya informel biçimde algılarını (Thacker, 2020), merdiven bağlamı ile birleştirdiklerini gösterebilir. Böylece, yükseklik ve derinlik bağlamı eğimi çağrıştıran bir bağlam (Stump, 1997) olarak görülebilir. Bu bulgu ile birlikte, fiziksel özellik ve geometrik oran temsillerine kıyasla fonksiyonel özellik temsiline eğitim kavramı vurgusunun daha az yapıldığı söylenebilir. Yükseklik ile derinlik ilişkisinin sorgulanması; temsil çeşitlerinden biri olan geometriksel ve fiziksel olarak eğimi içselleştirme adına önemli bir basamak (Deniz ve Uygur-Kabael, 2017) olmasına rağmen, eğimin diğer temsil çeşitlerine de vurgu yapılarak kavramsallaştırılması önerilebilir.

Öğrencilerin eğimi değişim oranı olarak anlamlandırmada zorluk çekmeleri, başka çalışmalarla saptanmış olup öğrencilerin eğimin farklı temsilleri arasında geçiş yapma becerilerine sahip olmasının önemi ortaya çıkmıştır (Deniz ve Uygur-Kabael, 2017; Stanton ve Moore-Russo, 2012). Bu çeşitler arasında anlamlı ilişkiler kurulabilmesi için öğretmenlerin temsilleri (sözlü, tablo, grafik, sembolik) vermesinin ötesinde; değişim oranı kavramını diğer bağlamlara transfer edebilmeleri (Herbert ve Pierce, 2008) için temsiller arasında ilişkilerin kurulacağı ortamların hazırlanması gerekir. Bu öğretim ortamlarında öğrencilerin eğime ilişkin temsil çeşitlerinin birbiri ile ilişkisini kurabilmelerinde kovaryasyonel düşünmenin kritik rolü önemsenmelidir (Ellis, Ely, Singleton ve Tasova, 2020; Thompson ve Carlson, 2017). Bu açıdan, kovaryasyonel düşünmeyi destekleyecek olan geometrik oran ve fonksiyonel özellik temsillerine göre hazırlanmış sınıf içi görevlerle öğrenci düşünceleri desteklenmeli ve incelenmelidir. Diğer bir açıdan, bu çalışmada noktaların belli olduğu sözel durumlar sunulmuş olup; ileriki bir çalışmada, bir noktası ve eğimin verildiği ve pozitif olmayan eğimin geometrik ve cebirsel oran, fonksiyonel özellik ve davranış göstergesi temsillerinin kavramsallaştırma süreçleri incelenebilir. Ayrıca, bu çalışmada görevler sözlü durumları içeren şekilde tasarlanmış olup; başka bir çalışmada grafik gösterimi temelinde görevler hazırlanıp incelenmesi önerilir.

Kaynakça

- Birgin, O. (2012). Investigation of eight-grade students' understanding of slope of the linear function. *Bolema*, 26(42), 139-162. doi: 10.1590/S0103636X2012000100008
- Carlson, M., Larsen, S. and Lesh, R. (2003). Integrating models and modeling perspective with existing research and practice. In R. Lesh and H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modelling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 465-478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Carlson, M., Oehrtman, M. and Engelke, N. (2010). The precalculus concept Assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and

- understandings, *Cognition and Instruction*, 28(2), 113-145. doi: 10.1080/07370001003676587
- Cho, P. and Nagle, C. (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students' mistakes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, 3(1), 135-150
- Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. The Netherlands.
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundation and model viability. In A. E. Kelly and R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547-589). New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). London: Routledge.
- Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC.
- Deniz, Ö. and Uygur-Kabael, T. (2017). Students' mathematization process of the concept of slope within the realistic mathematics education. *H.U. Journal of Education*, 32(1), 123-142. doi: 10.16986/HUJE.2016018796
- Dolores-Flores, C., Rivera-Lopez, M. I. and García-García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(3), 369-389. doi:10.1080/0020739X.2018.1507050
- Ellis, A., Ely, R., Singleton, B. and Tasova, H. (2020). Scaling-continuous variation: Supporting students' algebraic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 104(1), 87-103. doi: 10.1007/s10649-020-09951-6
- Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structures, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly and R. Lesh (Eds.), *Handbook of 21 research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Hattikudur, S., Prather, R., Asquith, P., Knuth, E., Nathan, M. and Alibali, M. (2011). Constructing graphical representations: Middle schoolers' developing knowledge about slope and intercept. *School Science and Mathematics*, 112(4), 230-240.
- Herbert, S. and Pierce, R. (2008). An "Emergent Model" for rate of change. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13, 231-249. doi: 10.1007/s10758-008-9140-8
- Hunting, R.P., (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal Of Mathematical Behavior*, 16 (2), 145-165.
- Koichu B. and Harel G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers *Educational Studies in Mathematics*, 65(3), 349-365. doi: 10.1007/S10649-006-9054-0
- Lobato, J. and Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 87-116.
- Lobato, J. and Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-asmeasure as a foundation of slope. In B. Litwiller and G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions*, (pp. 162-175). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

- Lobato, J., Ellis, A.B. and Muñoz, R. (2003). How “focusing phenomena” in the instructional environment afford students’ generalizations. *Mathematical Thinking and Learning*, 5, 1-36. doi: 10.1207/S15327833MTL0501_01
- Maher, C. A. and Sigley, R. (2020). Task-based interviews in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht, Netherlands: Springer.
- Maher, C. A. and Sigley, R. (2014). Task-Based Interviews in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 579–582). Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-007-4978-8_147
- Miles, M. B. and Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis* (2nd edition). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara, Turkey.
- Moore, K. C., Stevens, I. E., Paoletti, T., Hobson, N. L.F. and Liang, B. (2019). Pre-service teachers’ figurative and operative graphing actions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 56. doi: 10.1016/j.jmathb.2019.01.008
- Moore-Russo, D., Conner, A. and Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3-21.
- Nagle, C. and Moore-Russo, D. (2014). Slope Across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards. *The Mathematics Educator*, 23(2), 40-59.
- Nagle, C., Martínez-Planell, R. and Moore-Russo, D. (2019). Using APOS theory as a framework for considering slope understanding. *Journal of Mathematical Behavior*, 54, [100684]. doi: 10.1016/j.jmathb.2018.12.003
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A. and Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10, 1393–1414. doi: 10.1007/s10763-012-9344-1
- Reiken, J.J. (2008). *Coming to understand slope and the Cartesian connection: An investigation of student thinking* (Doktora Tezi). ProQuest Dissertations and Theses veri tabanından erişildi. (UMI No. 9943436)
- Schreier, M. (2012). *Qualitative content analysis in practice*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Smith, T.M., Seshaiyer, P., Peixoto, N., Suh, J.M., Bagshaw, G. and Collins, L.K. (2013). Exploring slope with stairs and steps. *Mathematics Teaching in Middle School*, 18(6), 370-377. doi:10.5951/mathteachmidscho.18.6.0370
- Stanton, M. and Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270-277.
- Strauss, A. and Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Stump, S. (2001a). Developing pre service teachers' pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behaviour*, 20, 207-227.
- Stump, S. L. (1997). *Secondary mathematics teachers' knowledge of the concept of slope*. Chicago, IL.

- Stump, S. L. (2001b). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, 101(2).
- Tanışlı, D. and Bike-Kalkan, D. (2018). Linear functions and slope: How do students understand these concepts and how does reasoning support their understanding? *Croatian Journal of Education*, 20 (4), 1193-1260.
- Teuscher, D. and Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand these concepts? *Mathematics Teacher*, 103, 519-524.
- Thacker, I. (2020). An embodied design for grounding the mathematics of slope in mid-dle school students' perceptions of steepness. *Research in Mathematics Education*, 22(3), 304–28. doi: 10.1080/14794802.2019.1692061
- Thompson, P. W. and Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *First compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- U.S. Department of Education (2013). National Assessment of Educational Progress (NAEP): *NAEP questions tool*. Erişim adresi (20 Mart 2017): <http://nces.ed.gov/nationsreportcard/itmrlsx/search.aspx?subjectmathematics>
- Walter, J. G. and Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 205-233.

Summary

Introduction

Principles and Standards for School Mathematics emphasizes that learners should be able to “solve problems that arise in mathematics and other contexts” (NCTM, 2000, p.52). Considering slope concept in real life such as inclinations of road, quantities that differ simultaneously and its applications in different disciplines such as engineering and physics, the concept has become an emerging issue. In this respect, it is emphasized that providing real life contextual problems to students in order to determine how students conceptualize slope in different ways is important (e.g. Lobato, Ellis and Muñoz, 2003). Stump (2001a) proposed 11 conceptualizations of slope including algebraic ratio, geometric ratio, physical property, functional property, real life the Moore-Russo and colleagues (2011) added three more categories: linearity constant, behavior indicator and determining property. Studies indicated that students have difficulty in conceptualizing slope that is height is bigger than slope is bigger (Clement, 1985), slope is a number rather than a measure (Lobato and Thanheiser, 2002). Moreover, conceptualizing slope and y intercept in graphics is challenging for students (Hattikudur et al., 2011). Studies also demonstrated students' difficulty in relating with different conceptualizations of slope (Birgin, 2012; Hattikudur, Prather, Asquith, Knuth, Nathan and Alibali, 2011; Deniz and Uygur-Kabael, 2017). How students' build relationships between representations of slope that are algebraic, geometric ratio, functional property and physical property could give insight about students' understanding of slope in a holistic and interrelated way (Nagle, Martínez-Planell and Moore-Russo, 2019). In this vein, it was aimed to investigate the eight grade students' performance on drawing graphs of real world

situations, to what extent they can interpret unit rate and rate of change concepts with its different representations (geometric and algebraic ratio, functional property), and how they relate different slope representations with each other. In addition, it was examined to what extent they can relate the given situations with the slope concept.

Method

The study employed a qualitative design to document eight grade students' understanding of slope concept on graphs, how they conceptualize rate of change with its different representations (geometric and algebraic ratio, functional property) and to what extent they relate unit rate with slope concept. The participants were 158 8th grade students chosen via convenient sampling from three public schools. Data were collected through four slope tasks. Tasks (one of those was static and three of those were dynamic) and sub-questions were prepared by considering the previous studies related to slope and slope representations. Slope conceptualizations including physical property, functional property, algebraic ratio, geometric ratio and linear constant are considered while writing sub questions. Additionally, individual clinical interviews with four students were conducted to get a deep insight into students' written responses and additional students' understanding of slope conceptualizations such as geometric rate of change and linear constant. The data was analyzed by categorizing students' responses according to codes and themes that were mentioned by other researchers. More specifically, we coded learners' performances on sketching of graphs in dynamic situations, finding unit rate, conceptualizing the unit rate/rate of change, expressing in algebraic form and relating slope concept with unit rate as correct, partial correct and incorrect. Moreover, we coded interviewees' responses concerning how they relate slope representations with each other, functional property, geometric ratio and physical property as main themes.

Results

Findings revealed that less than half of the students were able to construct graphs. Although learners whose graphs seem continuous, their way of sketching graphs was based on mainly taking points as discrete on coordinate axes. Those students, being able to represent the rate of change in graphs, could not indicate y-intercept on graph correctly. However, some of the students who were interviewed had problems in explaining the unit ratio with graphs, and they could not connect the unit ratio with the geometric ratio. Moreover, most of the students could not determine how the unit ratio involving two quantities will change when these quantities vary. Furthermore, students had a lack of understanding of the nature of rate of change that is constant for linear situations. In addition, based on the interview data, it was seen that students mainly used algebraic ratio ($y_2 - y_1 / x_2 - x_1$) while conceptualizing the unit ratio or slope rather than functional property (rate of change) and geometric ratio.

Discussion

Based on the findings, it could be deduced that students had inadequate knowledge and lacked the ability to interpret the concept of slope in the given contexts by considering its representations in an interconnected way. This finding was supported by findings of other studies in the literature (Birgin, 2012; Deniz and Uygur-Kabael,

2017). Students' memorization of certain rules regarding the slope or students' lack of basic knowledge regarding the slope concept (Herbert and Pierce, 2008) could be an explanation for these findings. Besides, we interpreted more of the students' sketches and activities to be indicative of figurative rather than operative thought. Considering interdependency of covariational relationship and slope conceptualization (Nagle Martínez-Planell and Moore-Russo, 2019), as it was expected, most of the students could not combine representations of geometric and algebraic ratio with functional property. Based on the findings, rather than asking students to calculate the slope given in the problem, asking them to interpret the meaning of the slope in the context and the relationship between the slope and rate of change are more crucial (Teuscher and Reys, 2010).

Pedagogical Implications

In this respect, preparing tasks to make students discuss geometric ratio with functional property on graphs could be a vital step to help learners to combine their understanding of the rate of change with covariational thinking. It is also recommended to conduct further studies to understand students' negative slope conceptualization on graphics.

Araştırmanın Etik Taahhüt Metni

Yapılan bu çalışmada bilimsel, etik ve alıntı kurallarına uyulduğu; 2018-2019 yılı bahar döneminde toplanmış olan veriler üzerinde herhangi bir tahrifatın yapılmadığı, karşılaşılabilecek tüm etik ihlallerde "Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi ve Editörünün" hiçbir sorumluluğunun olmadığı, tüm sorumluluğun Sorumlu Yazara ait olduğu ve bu çalışmanın herhangi başka bir akademik yayın ortamına değerlendirme için gönderilmemiş olduğu sorumlu yazar tarafından taahhüt edilmiştir.

Authors' Biodata/ Yazar Bilgileri

Emine AYTEKİN-KAZANÇ Düzce Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

Emine Aytekin-Kazanç works as a research assistant at Düzce University, Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education.

Ece ACAR-ÇAKIRCA Milli Eğitim Bakanlığı'nda matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.

Ece Acar-Çakırca works as a mathematics teacher at Ministry of Education.

Mine IŞIKSAL-BOSTAN Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. olarak görev yapmaktadır.

Mine Işıksal-Bostan works as a professor at Middle East Technical University, Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education.